对一类批量服务工作休假排队的分析 *

张宏波 † 王红蔚

(河南财政金融学院统计与数学学院，郑州 450046)

(†E-mail: zhanghb-168@163.com)

史定华

(上海大学理学院，上海 200444)

摘　要　本文讨论批量服务的 M/M/1 多重或单重工作休假排队，且假设在休假期或正规忙期每次服务掉的顾客数服从不同分布的随机变量. 对该排队模型，用 GI/M/1 型 Markov 过程建模. 通过求解该过程的联合平稳分布，得到了排队系统服务台平稳状态的详细刻画以及平稳队长分布的随机分解结果.

关键词　M/M/1 排队；批量服务；工作休假； GI/M/1 型 Markov 过程；平稳队长

MR(2000) 主题分类　60K25; 90B22

中图分类　O226

1　引言

在排队论中，休假排队系统是一个重要的研究热点. 考虑服务台休假的目的是为了合理利用排队系统的闲期，各种休假策略的引入为排队模型的应用提供了方便. 可以参见综述文章 [1] 或专著 [2].

Servi 和 Finn[3] 首先对 M/M/1 排队引入了多重工作休假策略. 与普通休假期服务台完全停止工作不一样，在工作休假期，服务台并不是完全停止工作，而是以较低的速率为到达的顾客提供服务. 后来， Liu 等 [4] 用 QBD 过程和矩阵解析方法对前文中的模型作了进一步研究，得到了相关指标平稳分布的随机分解结果. 另外， Tian 等 [5] 研究了 M/M/1 单重工作休假排队； Baba[6], Wu 和 Takagi[7] 分别研究了多重工作休假的 GI/M/1 以及 M/G/1 排队， Li 和 Tian[8] 讨论了 GI/M/1 单重工作休假排队， Cao 和 Liu[9] 考虑了带有 Bernoulli 策略，休假中断的 M/G/1 单重工作休假排队.

本文 2019 年 3 月 4 日收到. 2019 年 6 月 25 日收到修改稿.

* 河南省科技攻关计划 (172102210242) 资助项目.

† 通讯作者.

在上述工作休假排队模型中，在一个到达时刻只有一个顾客到达，在一次服务中也只服务掉一个顾客. 但在实际问题中，一个到达时刻会发生多个到达，同时在一个服务期也可以服务掉多个顾客，这称为批量到达或批量服务. 对批到达的 M/M/1 单重工作休假排队的研究可以参见 [10], 相应的多重工作休假排队的研究见 [11]. 虽然一般的批量服务排队很早就得到研究 [12], 但对批量服务工作休假排队的研究文献最近才出现 [13], 文中作者考虑了一类到达过程为 Poisson 过程，服务时间和休假时间服从一般分布的批到达和批服务的多重工作休假排队：当系统中顾客数小于 a 时服务台开始进入工作休假，在工作休假期，以较低的速率每次最多服务掉 b 个顾客. 当休假期结束时，如果发现系统中有 a 个顾客，则进入正规忙忙期，在忙期同样每次最多服务掉 b 个顾客. 对该模型，作者用补充变量法给出了不同时刻系统中顾客数分布的变换形式解. 随后作者又对该模型作了推广 [14], 进一步考虑了服务台可能出现故障的情形. 在这两个模型中，无论是在休假期还是在正规忙期，每次均最多服务掉 b 个顾客，这里 b 是一个常数.

在本文中，考虑一类批服务的 M/M/1 单重或多重工作休假排队，且假设在工作休假期以及在正规忙期，每次服务掉的顾客数都是随机变量且服从不同的分布. 对该模型，本文的主要贡献包括两方面：第一，假设在忙期和工作休假期服务的批量不是常数而是具有不同分布的随机变量；第二，用 GI/M/1 型 Markov 过程对排队系统建模. 虽然一般情形下 GI/M/1 型 Markov 过程平稳分布求解困难，但对本文的模型，可以求得其平稳分布的解析解，由此出发得到了所研究排队系统的一些平稳指标，特别是得到平稳队长分布的随机分解结构.

以下各节首先讨论多重工作休假情形，在第 2 节给出多重工作休假排队的 GI/M/1 型 Markov 过程模型，然后第 3 节和第 4 节对所建立的模型进行求解，得到了多重工作休假排队时服务台状态及平稳队长的刻画；第 5 节给出了相应单重工作休假排队的相关结果而略去了细节；最后第 6 节是本文的小结部分.

2 模型描述

本节对经典的 M/M/1 多重工作休假排队 (参见 [3]), 引入一类批量服务策略并给出其数学模型. 设顾客按照率为 λ 的 Poisson 过程到达系统而服务时间服从参数为 μ 的指数分布. 假设服务台每次最多服务掉 X 个顾客，即如果系统中顾客数不超过 X, 则经过一次服务，系统变空. 如果系统中顾客数超过 X, 则一次服务掉 X 个顾客. 这里 X 是一个取正整数值的随机变量，其分布律，概率母函数分别为

$$p_n = \mathrm{P}(X=n), \qquad n \geq 1, \qquad P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \qquad |z| \leq 1,$$

其均值记为 $p = \mathrm{E}(X)$.

当一次服务结束时，如果系统中没有顾客，则服务台将进入工作休假期，且休假期长度服从参数为 θ 的指数分布. 在工作休假期，一个到达的顾客将以较低的速率 $\eta < \mu$ 得到服务. 同样地，在工作休假期，也假设每次服务最多可以服务掉 Y 个顾客，这里

Y 是一个取正整数值的随机变量，其分布律和概率母函数分别为

$$q_n = \mathrm{P}(Y = n), \qquad n \geq 1, \qquad Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n, \qquad |z| \leq 1,$$

其均值记为 $q = \mathrm{E}(Y)$.

当一次休假结束后，如果系统中仍然没有顾客，则另一个独立的工作休假开始，否则，服务台进入正规忙期，以率 μ 为系统中的顾客提供服务.

现在，令 $L(t)$ 表示时刻 t 时系统中的顾客数，令 $J(t)$ 表示时刻 t 时服务台的状态，并规定：时刻 t 时如果服务台处于正规忙期，则其值为 0, 如果服务台处于工作休假状态，且正在进行第 k 次休假，则其值为 k, 这样，构造的二维随机过程 $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ 是一个 Markov 过程，且状态空间为

$$E = \{(0, l) : l \geq 1\} \cup \{(j, l) : j \geq 1,\ l \geq 0\},$$

其中对 $l \geq 1$, 状态 $(0, l)$ 表示服务台处于正规忙期且系统中有 l 个顾客；对 $j \geq 1$ 及 $l \geq 0$, 状态 (j, l) 表示服务台处于第 j 次工作休假且系统中有 l 个顾客．如果令

$$\bar{p}_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i, \qquad k = 0, 1, \cdots,$$
$$\bar{q}_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} q_i, \qquad k = 0, 1, \cdots,$$

则当状态按字典规律排列时，上述 Markov 过程的无穷小生成元为

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & & \\ \mathbf{D} & & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{p}_1\mu & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{p}_2\mu & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \theta & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \theta & 0 & & \\ & \theta & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ p_1\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ p_2\mu & p_1\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-(\lambda+\theta) & \lambda & & & & \\ \eta & -(\lambda+\eta+\theta) & \lambda & & & \\ \bar{q}_1\eta & q_1\eta & -(\lambda+\eta+\theta) & \lambda & & \\ \bar{q}_2\eta & q_2\eta & q_1\eta & -(\lambda+\eta+\theta) & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

因此，所建立过程 $\{(J(t),L(t)),\ t\geq 0\}$ 是一个具有无限位相的 GI/M/1 型 Markov 过程 (见 [15]).

由下一节的讨论可知，当 $\lambda<p\mu$ 时，如上定义过程的平稳分布唯一存在. 记其平稳分布为 $(\boldsymbol{\pi}_0,\boldsymbol{\pi}_1,\boldsymbol{\pi}_2,\cdots)$, 其中

$$\boldsymbol{\pi}_0=(\pi_{01},\pi_{02},\cdots),\qquad \boldsymbol{\pi}_k=(\pi_{k0},\pi_{k1},\cdots),\qquad k\geq 1$$

都是无穷维向量，则由 [15] 可知，平稳分布满足如下所示的算子几何解

$$\boldsymbol{\pi}_k=\boldsymbol{\pi}_1\mathbf{R}^{k-1},\qquad k\geq 1,\tag{2}$$

其中 $\mathbf{R}$ 称为率算子，且对本文的模型，它是矩阵方程

$$\mathbf{A}+\mathbf{R}\mathbf{B}=\mathbf{0}\tag{3}$$

的最小非负解. 另外，平稳分布的前两个分量 $\boldsymbol{\pi}_0,\boldsymbol{\pi}_1$ 由线性方程组

$$0=\boldsymbol{\pi}_0\mathbf{B}_0+\boldsymbol{\pi}_1\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{R}^l\Big)\mathbf{D},\tag{4}$$

$$0=\boldsymbol{\pi}_0\mathbf{A}_0+\boldsymbol{\pi}_1\mathbf{B}\tag{5}$$

和归一化条件确定.

3 几个引理

为了讨论排队系统平稳状态的性质，需给出 Markov 过程 $\{(J(t),L(t)),\ t\geq 0\}$ 的联合平稳分布，为此本小节求解方程 (3), (4) 和 (5). 首先需要以下引理.

引理 1 当 $\lambda<p\mu$ 时，方程

$$\mu zP(z)-(\lambda+\mu)z+\lambda=0\tag{6}$$

在 $(0,1)$ 内有唯一解. 另外，方程

$$\eta zQ(z)-(\lambda+\eta+\theta)z+\lambda=0\tag{7}$$

在 $(0,1)$ 内有唯一解.

证 先证明第一个结论. 令 $f(z)=\mu zP(z)+\lambda$, 则

$$f'(z)=\mu P(z)+\mu zP'(z)>0,\qquad f''(z)=2\mu P(z)+\mu zP''(z)>0,\qquad \forall\, z\in(0,1),$$

所以 $f(z)$ 在 $(0,1)$ 内是严格递增的凸函数，从而方程 (6) 即方程 $f(z)-(\lambda+\mu)z=0$ 只有当 $f'(1)>\lambda+\mu$ 时，即 $\lambda<p\mu$ 时在 $(0,1)$ 内有解，且是唯一解．第二个结论可类似地证明，也可参见 [10] 或 [11] 中的引理 1. 证毕.

引理 2　率算子 $\mathbf{R}$ 的具体形式如下：

$$\mathbf{R}=(1-r)\begin{bmatrix}1 & r & r^2 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\end{bmatrix},\tag{8}$$

其中 r 是方程 (7) 在 $(0,1)$ 内的唯一解.

证　由率算子的概率解释 [15] 可知对本文讨论的模型，$\mathbf{R}$ 中除了第一行外其余各行元素皆为 0. 现在令 $(r_0,r_1,\cdots)$ 表示该非零行，则通过简单的代数运算可知方程 (3) 的分量形式为

$$0=\theta-(\lambda+\theta)r_0+\eta\sum_{l=0}^{\infty}\bar{q}_l r_{l+1},\tag{9}$$

$$0=\lambda r_k-(\lambda+\eta+\theta)r_{k+1}+\eta\sum_{l=1}^{\infty}q_l r_{l+k+1},\qquad k\ge 0.\tag{10}$$

其中 (10) 是一个线性差分方程，但其中的和式不是卷积的形式，因而不能用母函数法求解.

易知 (10) 的解必形如 $r_k=cr^k$, 其中 c,r 待定．代入 (10) 可得 r 满足方程 (7), 再代入 (9) 式，经过计算可知 $c=1-r$, 即上述差分方程的解为 $r_k=(1-r)r^k$. 但由引理 1 知，方程 (7) 在 $(0,1)$ 内有唯一解，所以为了得到最小非负解，取 r 为该解，即可得引理结论．证毕.

引理 3　如果 $\lambda<p\mu$, 则初始向量 $\boldsymbol{\pi}_0$ 和 $\boldsymbol{\pi}_1$ 由以下两式给出：

$$\pi_{0n}=\frac{\pi_{01}}{\beta-r}(\beta^n-r^n),\qquad n\ge 1,\tag{11}$$

$$\pi_{1n}=\frac{\pi_{01}}{\alpha(\beta-r)}r^{n+1},\qquad n\ge 0,\tag{12}$$

其中 $\alpha=\theta r\big[\lambda-(\lambda+\mu)r+\mu rP(r)\big]^{-1}$, β 是方程 (6) 在 $(0,1)$ 内的唯一根，而 π_{01} 是待定常数，将由归一化条件确定

证　首先，向量 $\boldsymbol{\pi}_0$ 和 $\boldsymbol{\pi}_1$ 满足线性方程组 (4) 和 (5). 其中由方程 (5) 的分量形式可得

$$0=\mu\sum_{l=1}^{\infty}\pi_{0l}\bar{p}_{l-1}-(\lambda+\theta)\pi_{10}+\eta\sum_{l=0}^{\infty}\bar{q}_l\pi_{1,l+1},\tag{13}$$

$$0=\lambda\pi_{1n}-(\lambda+\eta+\theta)\pi_{1,n+1}+\eta\sum_{l=1}^{\infty}p_l\pi_{1,l+n+1},\quad n\ge 0,\tag{14}$$

方程 (14) 是一个齐次差分方程，由类似于引理 2 中的方法可得其位于 $(0,1)$ 内的唯一

收敛解为

$$\pi_{1n}=\pi_{10}r^n,\quad n\geq 0, \tag{15}$$

其次，由 (8) 可得

$$\mathbf{R}^l=(1-r)^{l-1}\mathbf{R},\qquad l\geq 1, \tag{16}$$

所以有

$$\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{R}^l=\mathbf{I}+\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{R}^l=\mathbf{I}+\frac{1}{r}\mathbf{R},$$

从而进一步可得

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{R}^l\right)\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\theta(1-r) & \theta(1-r)r & \theta(1-r)r^2 & \cdots \\ \theta & 0 & & \\ & \theta & 0 & \\ & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

因而通过简单的计算可知方程 (4) 的分量形式为

$$0=-(\lambda+\mu)\pi_{01}+\mu\sum_{l=1}^{\infty}p_l\pi_{0,l+1}+(1-r)\theta\pi_{10}+\theta\pi_{11}, \tag{17}$$

$$0=\lambda\pi_{0n}-(\lambda+\mu)\pi_{0,n+1}+\mu\sum_{l=1}^{\infty}p_l\pi_{0,l+n+1}+(1-r)r^n\theta\pi_{10}+\theta\pi_{1,n+1},\qquad n\geq 1. \tag{18}$$

把 (15) 代入 (18) 右边并化简可得

$$\lambda\pi_{0n}-(\lambda+\mu)\pi_{0,n+1}+\mu\sum_{l=1}^{\infty}p_l\pi_{0,l+n+1}=-\theta\pi_{10}r^n,\qquad n\geq 1,$$

当 $\lambda<p\mu$ 时，由类似于引理 2 的证明可知上述方程的唯一收敛解为

$$\pi_{0n}=A\beta^n-\alpha\pi_{10}r^{n-1},\qquad n\geq 1, \tag{19}$$

其中 A 是待定常数，β 是方程 (6) 在 $(0,1)$ 内的唯一根, 而 $\alpha=\theta r\big[\lambda-(\lambda+\mu)r+\mu rP(r)\big]^{-1}$ 是一个常数.

另外，把 (19) 代入 (17) 并化简，可得

$$-(\lambda+\mu)\pi_{01}+A\mu\beta P(\beta)-\pi_{10}\alpha\mu P(r)+\theta\pi_{10}=0.$$

再由 α 和 β 的定义可知

$$\mu\alpha P(r)=\left(\lambda+\mu-\frac{\lambda}{r}\right)\alpha+\theta,$$
$$\mu\beta P(\beta)=(\lambda+\mu)\beta-\lambda,$$

代入前一式并化简，可得

$$-(\lambda+\mu)\pi_{01}+A[(\lambda+\mu)\beta-\lambda]-\pi_{10}\alpha\Big(\lambda+\mu-\frac{\lambda}{r}\Big)=0.$$

在 (19) 式中令 $n=1$ 可知 $\pi_{01}=A\beta-\pi_{10}\alpha$, 从而 $\pi_{10}\alpha=A\beta-\pi_{01}$, 代入上式可解得 $A=\frac{\pi_{01}}{\beta-r}$, 从而 (11) 成立.

最后，因为 $\pi_{10}=A\beta-\pi_{01}=\frac{\pi_{01}\beta}{\beta-r}-\pi_{01}=\frac{\pi_{01}r}{\alpha(\beta-r)}$, 代入 (15) 即可得 (12) 式，从而完成了引理的证明. 证毕.

4　平稳状态分析

在引理 2 和引理 3 的基础上，现在给出本文的主要结论，其中第一结论是对排队系统稳态时服务台状态的精确描述，第二个结论是平稳队长的随机分解结果.

定理 1　对 $n\geq 0$, 令 p_{B_n} 表示稳态时服务台位于正规忙期且系统中有 n 个顾客的概率，对 $k\geq 1$, 令 p_{W_k} 表示稳态时服务台位于第 k 次工作休假的概率，则有

$$p_{B_n}=\frac{(1-r)K_1}{\beta-r}\left(\beta^n-r^n\right),\qquad n\geq 0,\tag{20}$$

$$p_{W_k}=\frac{K_1}{\alpha(\beta-r)}r(1-r)^{k-1},\qquad k\geq 1,\tag{21}$$

其中

$$K_1=\Big[\frac{1}{\alpha(\beta-r)}+\frac{1}{1-\beta}\Big]^{-1}\tag{22}$$

是一个正常数.

证　首先，由算子几何解 (2) 式和 (12), (16) 两式，有

$$\pi_{nk}=\frac{\pi_{01}}{\alpha(\beta-r)}(1-r)^{n-1}r^{k+1},\qquad n\geq 1,\quad k\geq 0,$$

因此由规一化条件易求得

$$\pi_{01}=\Big[\frac{1}{\alpha(\beta-r)(1-r)}+\frac{1}{(1-\beta)(1-r)}\Big]^{-1}=(1-r)K_1,$$

其中 K_1 如 (22) 式所示. 最后再由 $p_{B_n}=\pi_{0n}$, $p_{W_k}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi_{kn}$, 即可得定理的结论.

推论 1　令 p_B 表示稳态时服务台位于正规忙期的概率，令 p_W 表示稳态时服务台位于工作休假的概率，则有

$$p_B=\frac{K_1}{1-\beta},\qquad p_W=\frac{K_1}{\alpha(\beta-r)}.$$

证　由 (20), (21) 两式以及显然的关系式

$$p_B=\sum_{n=0}^{\infty}p_{B_n},\qquad p_W=\sum_{k=1}^{\infty}p_{W_k},$$

即可得结论．证毕．

推论 2 如果记 N 为平稳状态时在一个工作休假期服务台连续休假的次数，则 N 服从参数是 $1-r$ 的正整数值几何分布．

证 由 $\mathrm{P}(N=k)=\frac{p_{W_k}}{p_W}$ 出发经过简单的计算即可得结论．证毕．

定理 2 设 $\eta<\mu$ 及 $q\eta<p\mu$ 成立，则平稳状态时系统中顾客数 L 可以分解为两个独立的随机变量之和： $L=L_0+L_d$, 其中 L_0 是相应的无休假的 $\mathrm{M/M}^X/1$ 排队的平稳队长，服从参数是 $1-\beta$ 的几何分布．而附加队长 L_d 的概率分布律为

$$\mathrm{P}(L_d=n)=\begin{cases}\gamma, & n=0,\\ (1-\gamma)(1-r)r^{n-1}, & n\geq 1,\end{cases}\tag{23}$$

其中

$$\gamma=\frac{1-r}{1-\beta+\alpha(\beta-r)}\in(0,1)\tag{24}$$

是一个常数．因此附加队长 L_d 服从修正的几何分布，且以概率 γ 等于 0, 以概率 $1-\gamma$ 等于参数为 $1-r$ 的几何分布随机变量．

证 显然平稳队长是过程 $\{(J(t),L(t)),\ t\geq 0\}$ 对位相的边缘分布，所以有

$$\mathrm{P}(L=0)=\sum_{k=1}^{\infty}\pi_{k0}=\frac{(1-r)K_1}{\alpha(\beta-r)}=\gamma,$$

其中

$$\gamma=\frac{(1-r)K_1}{\alpha(\beta-r)}=\frac{1-r}{1-\beta+\alpha(\beta-r)}$$

是常数．另外

$$\mathrm{P}(L=n)=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{kn}=\pi_{0n}+\sum_{k=1}^{\infty}\pi_{kn}=\alpha\gamma(\beta^n-r^n)+\gamma r^n,\qquad n\geq 1,$$

所以易得平稳队长的概率母函数为

$$L(z)=\alpha\gamma\Big[\frac{1}{1-\beta z}+\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)\frac{1}{1-rz}\Big],$$

由此再经简单的计算，即可得 (23) 式．

最后需证明 $\gamma\in(0,1)$. 由引理 3 证明的最后一段知 $\alpha(\beta-r)>0$, 而 $r>0,\ 1-\beta>0$, 所以在 γ 的表达式中分母恒正，因而易知 $\gamma\in(0,1)$ 的充要条件是 $\alpha>1$. 由 α 和 r 的定义，易验证这又等价于

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\lambda-(\lambda+\mu)r+\mu rP(r)}{\theta r}=\frac{\lambda-(\lambda+\mu)r+\mu rP(r)}{\lambda-(\lambda+\eta)r+\eta rQ(r)}<1,$$

但上式分母等于 θr, 因而恒正，所以上式又等价于

$$g(r)\triangleq\mu P(r)-\mu<h(r)\triangleq\eta Q(r)-\eta,\qquad r\in(0,1).$$

因为对 $r\in(0,1)$, $g'(r)>0$, $g''(r)>0$, $h'(r)>0$, $h''(r)>0$, 所以若把 $g(r),h(r)$ 看作关于 r 的函数，两者均在 $(0,1)$ 上严格递增且凸．又因为 $g(0)=-\mu<-\eta=h(0)$, $g(1)=0=h(1)$, 所以只有当 $g'(1)>h'(1)$, 即 $q\eta<p\mu$ 时， $g(r)<h(r)$ 恒成立，从而完成了定理的证明．证毕．

5　单重休假情形

本小节考虑相应的单重休假排队模型．即假设当系统为空时，服务台立即进入一个随机长度的工作休假．当休假结束后，如果系统中没有顾客，则服务台进入闲期等待顾客的到达，否则，服务台进入正规忙期．该过程同样可以用 GI/M/1 型 Markov 过程建模，只是此时是单重休假，所建立的过程无穷小生成元不再具有如 (1) 所示的特殊结构，但其中子块却是 2 阶的．通过对过程联合平稳分布所满足的差分方程做类似的分析，可得如下结论 (具体细节限于篇幅从略):

定理 3　令 p_I 表示稳态时服务台位于闲期的概率，令 p_B 表示稳态时服务台位于正规忙期的概率，令 p_W 表示稳态时服务台位于工作休假的概率，则有

$$\begin{aligned}
&p_I=\frac{\theta}{\lambda}K_2,\\
&p_B=K_2\Big[\Big(\alpha+\frac{\theta}{\lambda}\Big)\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\alpha r}{1-r}\Big],\\
&p_W=\frac{K_2}{1-r},
\end{aligned}$$

其中

$$K_2=\Big[\Big(\alpha+\frac{\theta}{\lambda}\Big)\frac{1}{1-\beta}+\frac{1-\alpha}{1-r}\Big]^{-1}\in(0,1)$$

是一个常数．

定理 4　设 $\eta<\mu$ 及 $q\eta<p\mu$ 成立，则平稳状态时系统中顾客数 L 可以分解为两个独立的随机变量之和： $L=L_0+L_d$, 其中 L_0 是相应的无休假的 $\mathrm{M/M}^X/1$ 排队的平稳队长，服从参数是 $1-\beta$ 的几何分布．而附加队长 L_d 的概率分布律为

$$\mathrm{P}(L_d=n)=\begin{cases}\xi, & n=0,\\ (1-\xi)(1-r)r^{n-1}, & n\geq 1,\end{cases}$$

其中

$$\xi=\frac{(\lambda+\theta)K_2}{\lambda(1-\beta)}\in(0,1)$$

是一个常数．因此附加队长 L_d 服从修正的几何分布，且以概率 ξ 等于 0, 以概率 $1-\xi$ 等于参数为 $1-r$ 的几何随机变量．

本小节最后指出，如果 $\mathrm{P}(X=1)=1$ 且 $\mathrm{P}(Y=1)=1$, 即无论在休假期还是在正规忙期，每次只服务一个顾客，则这时易得

$$r=\frac{1}{2\eta}\big(\lambda+\eta+\theta-\sqrt{(\lambda+\eta+\theta)^2-4\lambda\eta}\big),\qquad \beta=\frac{\lambda}{\mu},$$

从而

$$\alpha = \frac{\theta r}{(1-r)(\lambda-\mu r)} = \frac{\lambda-\eta r}{\lambda-\mu r},$$

可以验证，此时本文的结论与经典的 M/M/1 工作休假排队的相应结论一致 [4,5], 从而本文模型是 [4,5] 中考虑的相应模型的推广.

6 小结

本文应用 GI/M/1 型 Markov 过程和算子几何解的方法讨论了一个批量服务的 M/M/1 多重或单重工作休假排队，得到了排队模型平稳状态的一些刻画以及平稳队长的随机分解结果，结果表明附加队长服从修正的几何分布.

然而，等待时间以及忙期分布是排队系统的另外两个重要性能指标，从而值进一步研究. 另外，本文的研究方法是否可以推广到更一般的模型，如一般到达过程或一般服务时间的模型，是另一个值得进一步考虑的问题.

参 考 文 献

[1] Doshi B. Queueing systems with vacations-a survey. *Queueing Systems*, 1989, 1: 29–66

[2] Tian N, Zhang Z. Vacation queueing models-theory and applications. New York: Springer, 2006

[3] Servi L, Finn S. M/M/1 queues with working vacations (M/M/1/WV). Performance Evaluation, 2002, 50: 41–52

[4] Liu W, Xu X, Tian N. Stochastic decompositions in the M/M/1 queue with working vacations. *Operations Research Letters*, 2007, 35: 595–600

[5] Tian N, Zhao X, Wang K. The M/M/1 queue with single working vacation. *International Journal of Information and Management Sciences*, 2008, 19: 621–634

[6] Baba Y. Analysis of a GI/M/1 queue with multiple working vacations. *Operations Research Letters*, 2005, 33: 201–209

[7] Wu D, Takagi H. M/G/1 queue with multiple working vacations. *Performance Evaluation*, 2006, 63: 654–681

[8] Li J, Tian N. Performance analysis of a GI/M/1 queue with single working vacation. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217: 4960–4971

[9] Gao S, Liu Z. An M/G/1 queue with single working vacation and vacation interruption under Bernoulli schedule. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37: 1564–1579

[10] Li J, Zhang Z, TIan N. Analysis for the M^X/M/1 working vacation queue. *International Journal of Information and Management Sciences*, 2009, 20: 379–394

[11] Baba Y. The M^X/M/1 queue with multiple working vacation. *American Journal of Operations Research*, 2012, 2: 217–224

[12] Bailey N. On queueing processes with bulk service. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1954, 61: 80–87

[13] Jeyakumar S, Senthilnathan B. Steady analysis of bulk arrival and bulk service queueing model with multiple working vacations. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 2016, 9: 375–394

[14] Jeyakumar S, Senthilnathan B. Modelling and analysis of a bulk service queueing model with multiple working vacations and server breakdown. *RAIRO-Operations Research*, 2017, 51: 485–508

[15] Li Q. Constructive computation in stochastic models with applications, the RG-factorizations. Beijing: Tsinghua University Press, New York: Springer, 2010

Analysis for a Working Vacation Queue with Batch Service

ZHANG Hongbo† WANG Hongwei

(*School of Statistics and Mathematics, Henan Finance University, Zhengzhou* 450046, *China*)

(†*E-mail: zhanghb-168@163.com*)

SHI Dinghua

(*College of Science, Shanghai University, Shanghai* 200444, *China*)

Abstract In this paper, we consider an M/M/1 queue with multiple or single working vacation and batch service both in regular busy period and in working vacation, where the batch size in regular busy period or in working vacation period is assumed to be random variable with different distribution. The queueing system can be modeled by a special GI/M/1 type Markov process. By solving the stationary distribution for the process, we obtain some exact descriptions for the stationary status of the server. We also give the stochastic decomposition structure for stationary queue length of the queue.

Key words M/M/1 queue; batch service; working vacation; GI/M/1 type Markov process; stochastic decomposition

MR(2000) Subject Classification 62K25; 90B22

Chinese Library Classification O226