第 41 卷 第 4 期 应用数学学报 Vol. 41 No. 4
2018 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2018

图的无符号拉普拉斯特征值 α 次幂总和的界 *

陈毅贞　　徐丽琼 †

(集美大学理学院, 厦门 363105)

(†E-mail: xuliqiong@jmu.edu.cn)

摘　要　令 G 为简单图. $s_\alpha(G)$ 等于图 G 的无符号拉普拉斯特征值 α 次幂的总和, 其中 α 为实数且 $\alpha\neq 0,1$. 本文我们得到一些连通图的 $s_\alpha(G)$ 的新的界, 并给出了正则图的 Mycielskian 图、正则图及半正则二部图的 Double 图这些特殊图类的 $s_\alpha(G)$ 的新的界. 由这些结论的特殊情况可得到相应图的关联能量的界.

关键词　无符号拉普拉斯特征值 α 次幂;　Mycielskian 图;　Double 图

MR(2000) 主题分类　05C15

中图分类　O157.1

1　引言

设 G 为具有 m 条边的 n 阶简单连通无向图. G 的顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 边集为 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 设 $A(G)=(a_{kj})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵, 其中 a_{kj} 是连接 v_k 与 v_j 的边的数目, 其特征值为 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$. $n\times m$ 阶矩阵 $I(G)$ 表示 G 的关联矩阵, 若 v_i 与 e_j 关联, 则矩阵 $I(G)$ 的 (i,j) 元素为 1, 否则为 0. $D(G)=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 为图 G 的度对角矩阵, 称矩阵 $L(G)=D(G)-A(G)$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵, 其特征值为 $u_1\geq u_2\geq\cdots\geq u_n$; $Q(G)=D(G)+A(G)$ 为图 G 的无符号拉普拉斯矩阵, 其特征值为 $q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_n$. 由于 $L(G)$ 和 $Q(G)$ 都为实对称且半正定矩阵, 因此其特征值都是非负实数. 若 G 为连通的二部图, 则 $q_i>0$, 其中 $i=1,2,\cdots,n-1$ 且 $q_n=0$[1]. 若 G 为连通非二部图, 则 $q_i>0$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$ (见 [2]), 且有 $\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=2m$ (见 [1]). 更多关于拉普拉斯特征值及无符号拉普拉斯特征值的结论可参看 [1–5].

1978 年, Gutman[6] 提出图的能量的概念, 将图 G 的能量 $E(G)$ 定义为邻接矩阵

本文 2015 年 10 月 15 日收到. 2018 年 3 月 15 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (11301217,11571139), 福建省自然科学基金 (2018J01419) 资助项目.

$A(G)$ 特征值的绝对值之和. 能量与化学问题紧密关联 [7,8], 随着该领域的深入研究, 能量的概念被推广到任意实矩阵 [9], 矩阵 M 的能量为 M 的奇异特征值之和, 矩阵 M 的奇异特征值为矩阵 MM^T 的特征值的非负平方根, 其中 M^T 是 M 的转置.

2009 年 Jooyandeh 等人 [10] 将图 G 的关联能量 $\mathrm{IE}(G)$ 定义为 G 的关联矩阵 $I(G)$ 的奇异特征值之和. 又由矩阵的定义知, $I(G)\,I(G)^T = D(G) + A(G) = Q(G)$, 所以 $\mathrm{IE}(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{q_i}$ (见 [7]). 更多关于 $\mathrm{IE}(G)$ 的结论可以参看 [1,10–13]. 图的类拉普拉斯能量 $\mathrm{LEL}(G)$ 被定义为 $\mathrm{LEL}(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{u_i}$ (见 [14]). 最初认为拟拉普拉斯能量 [14] 与拉普拉斯能量会有很多相似处 [15], 后来的研究发现, 拟拉普拉斯能量的性质更接近于图的能量的性质 [16]. 更多关于 LEL 的结论可参看 [17,18].

设 α 为实数且 $\alpha \neq 0, 1$, 图 G 的拉普拉斯特征值 α 次幂的总和记为 σ_α, $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(G) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i^\alpha$. (见 [19]).

当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$, 有 $\sigma_0 = n - 1$ 或 $\sigma_1 = 2m$, 其中 m 为图 G 的边数. 注意到 $\sigma_{1/2}$ 相当于 $\mathrm{LEL}(G)$ 且 $n\sigma_{-1}$ 相当于 G 的 Kirchhoff 指标 [20−22]. 对于更多的关于 Kirchhoff 指标的研究, 读者可以参考最近的文章 [19,23−26].

根据 $\mathrm{IE}(G)$, $\mathrm{LEL}(G)$ 及 σ_α 的概念, Akbari et al.[27] 将图 G 的无符号拉普拉斯特征值 α 次幂的总和记为 s_α, 即 $s_\alpha = s_\alpha(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^\alpha$.

当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 时, 则有 $s_0 = n$ 或 $s_1 = 2m$. 注意到 $s_{1/2}$ 相当于关联能量 $\mathrm{IE}(G)$. 对于任意的二部图, 拉普拉斯特征值与无符号拉普拉斯特征值是一致的 [1−3,5,28]. 因此, 对于任意的二部图, $\sigma_\alpha(G)$ 等于 $s_\alpha(G)$ (see [29]). $\mathrm{LEL}(G)$ 等于 $\mathrm{IE}(G)$ (见 [1]).

近年来, Zhou[16] 改进了 [19] 中图 $s_\alpha(G)$ 的界; Das[13] 给出二部图的 $s_\alpha(G)$ 的界; Bozkurt[29] 改进了 [23] 中的部分结果且进一步给出非二部图的 $s_\alpha(G)$ 的界; Bozkurt, Gutman 等人 [30] 改进了 Li[31] 非二部图的 $s_\alpha(G)$ 的界. 更多关于 $s_\alpha(G)$ 的上下界的研究, 读者可以参考文章 [1,27,30,32].

本文的余下部分, 在第 3 节中, 我们介绍了一些连通图的 $s_\alpha(G)$ 的新的界, 并改进了 [32] 中的部分结论. 在第 4 节中, 在第 3 节的基础上我们讨论了正则图的 Mycielskian 图、正则图及半正则二部图的 Double 图这些特殊图类的 $s_\alpha(G)$ 的新的界. 由这些结论的特殊情况可得到相应图的关联能量的界.

2 引理

令 $G_1 \times G_2$ 为图 G_1 和 G_2 的笛卡尔积 [33]. 令 $t(G)$ 和 $t(G \times K_2)$ 分别表示图 G 和图 $G \times K_2$ 的生成树数目. 令 Δ 和 δ 分别表示图 G 顶点的最大度和最小度.

引理 2.1[28] $L(G)$ 和 $Q(G)$ 的谱相同当且仅当图 G 是二部图.

引理 2.2[4] 若 G 为具有 n 个顶点的连通二部图, 则

$$\prod_{i=1}^{n-1} q_i = nt(G).$$

若 G 为具有 n 个顶点的连通非二部图，则

$$\prod_{i=1}^{n} q_i = \frac{2t(G \times K_2)}{t(G)}.$$

引理 2.3[4] 设 G 为没有 1 度顶点的连通图，其最大度为 Δ, 则

$$q_1 \geq 1 + \Delta + \frac{1}{\Delta - 1},$$

等号成立当且仅当 G 为圈.

引理 2.4[34] 设 G 为具有 m 条边， n 个顶点的非正则图，且其最大度为 Δ, 最小度为 δ, 则

$$q_1 > \frac{4m}{n} + \frac{(\Delta - \delta)^2}{2n\Delta}.$$

引理 2.5[2] 设 G 是直径为 d 的连通图. 若 G 恰有 k 个互异的无符号拉普拉斯特征值，则 $d + 1 \leq k$.

引理 2.6[35] 图 G 为二部图当且仅当它的谱关于原点对称.

引理 2.7 (Jensen'sInequality) 若 f 是定义在区间 I 上的上凸函数 (下凸函数), 且 $x_i \in I$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \geq (\leq) \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

对于严格的凸函数，上述不等式等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

引理 2.8[32] 设 G 为具有 $n \geq 3$ 个顶点，m 条边, 最大度为 Δ 的连通图. 令 $\alpha \neq 0, 1$.

(i) 若 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$, 则

$$\mathrm{s}_\alpha(G) > (1 + \Delta)^\alpha + \frac{(2m - 1 - \Delta)^\alpha}{(n-1)^{\alpha - 1}}. \tag{1}$$

(ii) 若 $0 < \alpha < 1$, 则

$$\mathrm{s}_\alpha(G) < (1 + \Delta)^\alpha + \frac{(2m - 1 - \Delta)^\alpha}{(n-1)^{\alpha - 1}}. \tag{2}$$

3 一些连通图的 $s_\alpha(G)$ 的上下界

本节我们讨论了一些连通图的 $s_\alpha(G)$ 的新的界，并改进了 [32] 中的部分结论.

定理 3.1 设 G 为具有 $n \geq 3$ 个顶点， m 条边的非正则连通图,

(i) 若 G 为二部图，则

$$s_\alpha(G) > \Big(\frac{4m}{n} + \frac{(\Delta - \delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha + (n-2)\Big(\frac{n\,t(G)}{4m/n} + (\Delta - \delta)^2/2n\Delta\Big)^{\alpha/(n-2)}. \tag{3}$$

(ii) 若 G 为非二部图，则

$$s_\alpha(G) > \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha + (n-1)\Big(\frac{2\,t(G\times K_2)}{(4m/n+(\Delta-\delta)^2/2n\Delta)\,t(G)}\Big)^{\alpha/(n-1)}. \tag{4}$$

证 (i) 由引理 2.2 知，$\prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i = n\,t(G)$. 由算术几何平均不等式，可得

$$\begin{aligned} s_\alpha(G) =& q_1^\alpha + \sum_{i=2}^{n-1} q_i^\alpha \ge q_1^\alpha + (n-2)\Big(\prod_{i=2}^{n-1} q_i^\alpha\Big)^{1/(n-2)} \\ =& q_1^\alpha + (n-2)\Big(\frac{n\,t(G)}{q_1}\Big)^{\alpha/(n-2)}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_{n-1}$.

考虑函数

$$f(x) = x^\alpha + (n-2)(nt(G)/x)^{\alpha/(n-2)}.$$

易知，对任意的 $\alpha>0$ 或 $\alpha<0$, 当 $x\ge (nt(G))^{1/(n-1)}$ 时，函数 $f(x)$ 为单调递增函数. 由引理 2.4 及算术几何平均不等式，可得

$$q_1 > 4m/n + (\Delta-\delta)^2/2n\Delta \ge 2m/(n-1) \ge (nt(G))^{1/(n-1)}.$$

所以

$$\begin{aligned} s_\alpha(G) >& f\Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big) \\ =& \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha + (n-2)\Big(\frac{nt(G)}{4m/n+(\Delta-\delta)^2/2n\Delta}\Big)^{\alpha/(n-2)}. \end{aligned}$$

从而得 (3). 定理第一部分得证.

(ii) 由引理 2.2 及算术几何平均不等式，可得

$$s_\alpha(G) = q_1^\alpha + \sum_{i=2}^{n} q_i^\alpha \ge q_1^\alpha + (n-1)\Big(\prod_{i=2}^{n} q_i^\alpha\Big)^{1/(n-1)} = q_1^\alpha + (n-1)\Big(\frac{2\,t(G\times K_2)}{t(G)q_1}\Big)^{\alpha/(n-1)},$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_n$.

考虑函数

$$g(x) = x^\alpha + (n-1)\Big(\frac{2t(G\times K_2)}{t(G)x}\Big)^{\alpha/(n-1)}.$$

易知，对任意的 $\alpha>0$ 或 $\alpha<0$, 当 $x>\big(\frac{2t(G\times K_2)}{t(G)}\big)^{1/n}$ 时， $g(x)$ 为单调递增函数. 由引理 2.4, 可得

$$q_1 > \frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta} > \frac{2m}{n}.$$

根据算术几何平均不等式及引理 2.2, 可知

$$\frac{2m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i \ge \Big(\prod_{i=1}^{n} q_i\Big)^{1/n} = \Big(\frac{2t(G\times K_2)}{t(G)}\Big)^{1/n}. \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned}s_\alpha(G) >& g\Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)\\ =&\Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha+(n-1)\Big(\frac{2\,t(G\times K_2)}{(4m/n+(\Delta-\delta)^2/2n\Delta)t(G)}\Big)^{\alpha/(n-1)}.\end{aligned}$$

从而得 (4). 证毕.

定理 3.2 (i) 设 G 为具有 $n\geq 3$ 个顶点的非正则连通二部图,

若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 则

$$s_\alpha(G) > \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha+\frac{\big(2m-\frac{4m}{n}-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}. \tag{6}$$

若 $0<\alpha<1$, 则

$$s_\alpha(G) < \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha+\frac{\big(2m-\frac{4m}{n}-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}. \tag{7}$$

(ii) 设 G 为具有 $n\geq 3$ 个顶点， m 条边，最大顶点度为 Δ 且最小顶点度为 δ 的非正则连通非二部图.

若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 则

$$s_\alpha(G) > \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha+\frac{\big(2m-\frac{4m}{n}-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)^\alpha}{(n-1)^{\alpha-1}}. \tag{8}$$

若 $0<\alpha<1$, 则

$$s_\alpha(G) < \Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^\alpha+\frac{\big(2m-\frac{4m}{n}-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)^\alpha}{(n-1)^{\alpha-1}}. \tag{9}$$

证 (i) 首先假设 G 为二部图. 对任意的 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 当 $x>0$ 时， x^α 为下凸函数. 由引理 2.7, 可得

$$\Big(\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{n-2}q_i\Big)^\alpha\leq\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{n-2}q_i^\alpha,$$

即

$$\sum_{i=2}^{n-1}q_i^\alpha\geq\frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}}\Big(\sum_{i=2}^{n-1}q_i\Big)^\alpha,$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_{n-1}$. 从而有

$$s_\alpha(G)\geq q_1^\alpha+\frac{1}{(n-2)^{\alpha-1}}\Big(\sum_{i=2}^{n-1}q_i\Big)^\alpha=q_1^\alpha+\frac{(2m-q_1)^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}.$$

考虑函数

$$f(x)=x^{\alpha}+\frac{(2m-x)^{\alpha}}{(n-2)^{\alpha-1}}.$$

易知，当 $x\geq 2m/(n-1)$ 时，函数 $f(x)$ 为单调递增函数．由引理 2.4 并考虑到 $q_1>4m/n+(\Delta-\delta)^2/2n\Delta>4m/n>2m/(n-1)$, 可得对任意的 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$,

$$s_{\alpha}(G)>f\Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)=\Big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\Big)^{\alpha}+\frac{\big(2m-\frac{4m}{n}-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)^{\alpha}}{(n-2)^{\alpha-1}}.$$

从而得 (6).

若 $0<\alpha<1$, 注意到当 $x>0$ 时， x^{α} 为上凸函数，所以

$$\Big(\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{n-2}q_i\Big)^{\alpha}\geq\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{n-2}q_i^{\alpha},$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_{n-1}$. 对于任意 $x\geq 2m/(n-1)$， $f(x)$ 单调递减．从而由类似上述的讨论，我们可以证得 (7).

(ii) 现在考虑当 G 为非二部图的情况．由类似 (i) 的讨论可知，对于任意的 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 当 $x>0$ 时， x^{α} 为下凸函数．由引理 2.7, 可得

$$\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n-1}\,q_i\Big)^{\alpha}\leq\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n-1}q_i^{\alpha},$$

即

$$\sum_{i=2}^{n}q_i^{\alpha}\geq\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\Big(\sum_{i=2}^{n}q_i\Big)^{\alpha},$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_n$. 从而有

$$s_{\alpha}(G)\geq q_1^{\alpha}+\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\Big(\sum_{i=2}^{n}q_i\Big)^{\alpha}=q_1^{\alpha}+\frac{(2m-q_1)^{\alpha}}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

易知，当 $x>2m/n$ 时， $g(x)=x^{\alpha}+(2m-x)^{\alpha}/(n-1)^{\alpha-1}$ 为单调递增函数．由于 $q_1>4m/n+(\Delta-\delta)^2/2n\Delta>4m/n>2m/n$, 故对任意的 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$， $s_{\alpha}(G)>g\big(\frac{4m}{n}+\frac{(\Delta-\delta)^2}{2n\Delta}\big)$. 从而得 (8).

若 $0<\alpha<1$, 对任意的 $0<\alpha<1$, 当 $x>0$ 时， x^{α} 为上凸函数，所以

$$\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n-1}\,q_i\Big)^{\alpha}\geq\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n-1}q_i^{\alpha},$$

等号成立当且仅当 $q_2=\cdots=q_n$. 由于当 $x>2m/n$ 时， $g(x)$ 为单调递减函数．从而我们可以证得 (9). 定理证毕.

定理 3.3 设 G 为具有 $n\geq 3$ 个顶点且没有 1 度顶点的连通图， (i) 若 G 为二部图，则

$$s_{\alpha}(G)\geq\Big(1+\Delta+\frac{1}{\Delta-1}\Big)^{\alpha}+(n-2)\Big(\frac{n\,t(G)}{1+\Delta+1/(\Delta-1)}\Big)^{\alpha/(n-2)},\tag{10}$$

等号成立当且仅当 $G \cong C_4$.

(ii) 若 G 为非二部图，则

$$s_\alpha(G) \geq \Big(1+\Delta+\frac{1}{(\Delta-1)}\Big)^\alpha + (n-1)\Big(\frac{nt(G\times K_2)}{t(G)\,(1+\Delta+1/(\Delta-1)}\Big)^{\alpha/(n-1)}, \tag{11}$$

等号成立当且仅当 $G \cong C_3$.

证 (i) 由 $1+\Delta \geq 1+2m/n=(2m+n)/n \geq 2m/(n-1)$, 可知 $1+\Delta+1/(\Delta-1) > 2m/(n-1)$.

由引理 2.3 及算术几何平均不等式，可得 $q_1 \geq 1+\Delta+1/(\Delta-1) > 2m/(n-1) \geq (nt(G))^{1/(n-1)}$. 所以类似定理 3.1 的证明，可得 $s_\alpha(G) \geq f(1+\Delta+1/(\Delta-1))$. 从而得到 (10).

若 (10) 中的等号成立，则 $q_1 = 1+\Delta+1/(\Delta-1)$, $q_2=\cdots=q_{n-1}$. 由引理 2.3 知 G 为圈. 又由引理 2.5 知 G 为直径至多为 2 的二部图. 从而可知 $G \cong C_4$.

反之，若 $G \cong C_4$, 我们易知 (10) 中等号成立.

(ii) 由引理 2.3 及 (5) 得,

$$q_1 \geq 1+\Delta+1/(\Delta-1) > \Delta \geq 2m/n \geq \Big(\frac{2\,t(G\times K_2)}{t(G)}\Big)^{1/n}.$$

所以类似定理 3.1 的证明可得， $s_\alpha(G) \geq (1+\Delta+1/(\Delta-1))$. 从而得到 (11).

若 (11) 中的等号成立, 则有 $q_1 = 1+\Delta+1/(\Delta-1)$, $q_2=\cdots=q_n$. 由引理 2.3 知，G 为圈. 又由引理 2.5 知， G 恰有两个不同的无符号拉普拉斯特征值. 从而证得 $G \cong C_3$.

反之，若 $G \cong C_3$, 我们可以直接证得 (11) 中的等号成立. 证毕.

定理 3.4 (i) 设 G 为具有 $n \geq 3$ 个顶点且没有 1 度顶点的连通二部图，若 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$, 则

$$s_\alpha(G) \geq \Big(1+\Delta+\frac{1}{\Delta-1}\Big)^\alpha + \frac{(2m-1-\Delta-1/(\Delta-1))^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}. \tag{12}$$

若 $0<\alpha<1$, 则

$$s_\alpha(G) \leq \Big(1+\Delta+\frac{1}{\Delta-1}\Big)^\alpha + \frac{(2m-1-\Delta-1/(\Delta-1))^\alpha}{(n-2)^{\alpha-1}}. \tag{13}$$

不等式 (12) 或 (13) 中等号成立当且仅当 $G \cong C_4$.

(ii) 设 G 为具有 $n \geq 3$ 个顶点， m 条边，最大顶点度为 Δ 且没有 1 度顶点的连通非二部图.

若 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$, 则

$$s_\alpha(G) \geq \Big(1+\Delta+\frac{1}{\Delta-1}\Big)^\alpha + \frac{(2m-1-\Delta-1/(\Delta-1))^\alpha}{(n-1)^{\alpha-1}}. \tag{14}$$

若 $0<\alpha<1$, 则

$$s_\alpha(G)\le\Big(1+\Delta+\frac{1}{\Delta-1}\Big)^\alpha+\frac{(2m-1-\Delta-1/(\Delta-1))^\alpha}{(n-1)^{\alpha-1}}. \tag{15}$$

不等式 (14) 或 (15) 中等号成立当且仅当 $G\cong C_3$.

证 (i) 首先考虑 G 为二部图的情况. 由定理 3.3 的证明可知，$q_1\ge 1+\Delta+1/(\Delta-1)>2m/(n-1)$. 类似定理 3.2 的证明，可得 (12) 及 (13).

不等式 (12) 或 (13) 中的等号成立当且仅当 $q_1=1+\Delta+1/(\Delta-1)$, $q_2=\cdots=q_{n-1}$. 类似定理 3.3 的证明过程，可知 (12) 或 (13) 中等号成立当且仅当 $G\cong C_4$.

(ii) 考虑 G 为非二部图的情况. 由引理 2.3, 可得 $q_1\ge 1+\Delta+1/(\Delta-1)>\Delta\ge 2m/n$. 类似定理 3.2 的证明过程，可得 (14) 及 (15).

不等式 (14) 或 (15) 中的等号成立当且仅当 $q_1=1+\Delta+1/(\Delta-1)$, $q_2=\cdots=q_n$. 类似定理 3.3 的证明过程，可知 (14) 或 (15) 中等号成立当且仅当 $G\cong C_3$. 证毕.

注 由定理 3.4 的证明知，若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 则下界 (12) 和 (14) 比下界 (1) 更好; 若 $0<\alpha<1$, 则上界 (13) 和 (15) 比上界 (2) 更好. 因此定理 3.4 改进了 [32, 引理 2.8] 中的结论.

4 一些特殊图类的 $s_\alpha(G)$ 的上下界

本节我们讨论正则图的 Mycielskian 图、正则图及半正则二部图的 Double 图这些特殊图类的 $s_\alpha(G)$ 的上下界.

Mycielski 在 [36] 中定义了一种有趣的图的变换，称之为 G 的 Mycielskian, G 通过变换后得到的图记为 $\mu(G)$. 对任意的简单连通图 $G=(V,E)$, G 的 Mycielskian 图，即 $\mu(G)$ 的顶点集为 $V(\mu(G))=V(G)\cup V'(G)\cup\{u\}$, 其中 $V'(G)=\{x':x\in V(G)\}$, 边集为 $E(\mu(G))=E(G)\cup\{xy':y'\in V'(G),\ xy\in E(G)\}\cup\{y'u:y'\in V'(G)\}$. 在 $\mu(G)$ 中称 x' 为 x 的双胞胎，反之亦然，且称 u 为 $\mu(G)$ 的根.

定理 4.1 设 G 为具有 n 个顶点， m 条边的 r 正则图.

(i) 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，则有

$$s_\alpha(\mu(G))>3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+2^{1-\alpha}(n-1)^{1-\alpha}[(3r+1)(n-1)-r]^\alpha. \tag{16}$$

(ii) 当 $0<\alpha<1$ 时，则有

$$s_\alpha(\mu(G))<3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+2^{1-\alpha}(n-1)^{1-\alpha}[(3r+1)(n-1)-r]^\alpha. \tag{17}$$

证 令 $A(G)$ 为 G 的邻接矩阵，其特征值为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$. 由于 $A(G)$ 是实对称矩阵，则有 $A=PDP^T$, 其中 D 为对角矩阵 $\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, P 是正交特征向量为 p_i 的正交矩阵，即对任意的 i, $Ap_i=\lambda_ip_i$. 特别地，若记 e 为全 1 的 n 维向量，则有 $p_1=\frac{e}{\sqrt{n}}$. 因此，对于任意的 $i=2,\cdots,n$, 有 $e^Tp_i=0$, 从而可得 $e^TP=(\sqrt{n},0,\cdots,0)$.

根据 $\mu(G)$ 的定义，可知 $\mu(G)$ 的邻接矩阵和度矩阵分别为：

$$A(\mu(G))=\begin{pmatrix} A & A & 0\\ A & 0 & e\\ 0 & e^T & 0\end{pmatrix},\qquad D(\mu(G))=\begin{pmatrix} 2rI_n & 0 & 0\\ 0 & (r+1)I_n & 0\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}.$$

由 $\mu(G)$ 的无符号拉普拉斯矩阵为 $Q(\mu(G))=A(\mu(G))+D(\mu(G))$ 且 $A=PDP^T$, 可得

$$\begin{aligned} Q(\mu(G))&=\begin{pmatrix} A+2rI_n & A & 0\\ A & (r+1)I_n & e\\ 0 & e^T & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PDP^T+2rI_n & PDP^T & 0\\ PDP^T & (r+1)I_n & e\\ 0 & e^T & n\end{pmatrix},\\ &=\begin{pmatrix} P & 0 & 0\\ 0 & P & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D+2rI_n & D & 0\\ D & (r+1)I_n & P^Te\\ 0 & e^TP & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^T & 0 & 0\\ 0 & P^T & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 P 是正交矩阵，可知 $Q(\mu(G))$ 的谱与矩阵 B 的谱相同，其中

$$B=\begin{pmatrix} D+2rI_n & D & 0\\ D & (r+1)I_n & P^Te\\ 0 & e^TP & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1+2r & & & \lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\ & & \lambda_n+2r & & & \lambda_n & 0\\ \lambda_1 & & & r+1 & & & \sqrt{n}\\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\ & & \lambda_n & & & r+1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{n} & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}.$$

从而有

$$|tI_{2n+1}-B|=\begin{vmatrix} t-\lambda_1-2r & & & -\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\ & & t-\lambda_n-2r & & & -\lambda_n & 0\\ -\lambda_1 & & & t-r-1 & & & -\sqrt{n}\\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\ & & -\lambda_n & & & t-r-1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{n} & \cdots & 0 & t-n\end{vmatrix}.$$

根据 [37], 展开 $\det(tI_{2n+1}-B)$, 可直接得到

$$\begin{aligned}|tI_{2n+1}-B|=&\begin{vmatrix} t-\lambda_1-2r & -\lambda_1 & 0\\ -\lambda_1 & t-r-1 & -\sqrt{n}\\ 0 & -\sqrt{n} & t-n\end{vmatrix}\begin{vmatrix} t-\lambda_2-2r & -\lambda_2\\ -\lambda_2 & t-r-1\end{vmatrix}\\ &\cdots\begin{vmatrix} t-\lambda_n-2r & -\lambda_n\\ -\lambda_n & t-r-1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$=\big[t^3-(4r+1+n)t^2+(2r^2+4rn+3r)t-2r^2n\big]\prod_{i=2}^{n}\big[t^2-(3r+\lambda_i+1)t +(2r^2+2r+\lambda_i r+\lambda_i-\lambda_i^2)\big].$$

因此， B 的谱，即 $\mu(G)$ 的无符号拉普拉斯谱为

$$\Big\{t_1\,,\,t_2\,,\,t_3\,,\,\underbrace{t_{21}\,,\cdots,t_{n1}}_{n-1},\,\underbrace{t_{22}\,,\cdots,t_{n2}}_{n-1}\Big\},$$

其中 t_1,t_2,t_3 为三次多项式 $t^3-(4r+1+n)t^2+(2r^2+4rn+3r)t-2r^2n$ 的根 (由于 G 是 r 正则的，可知 $\lambda_1=r$) 且 $t_1+t_2+t_3=4r+1+n$. t_{i1},t_{i2} 为 $t^2-(3r+\lambda_i+1)t+(2r^2+2r+\lambda_i r+\lambda_i-\lambda_i^2)$ 的根且 $t_{i1}+t_{i2}=3r+\lambda_i+1$ ($i=2\,,\cdots,\,n$). 从而有

$$s_\alpha(\mu(G))=t_1^\alpha+t_2^\alpha+t_3^\alpha+\sum_{i=2}^{n}(t_{i1}^\alpha+t_{i2}^\alpha).$$

(i) 注意到当 $x>0$, $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时， x^α 为下凸函数. 由引理 2.7, 可得

$$\Big(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\Big)^\alpha\le\frac{t_1^\alpha+t_2^\alpha+t_3^\alpha}{3},\qquad \Big(\frac{t_{i1}+t_{i2}}{2}\Big)^\alpha\le\frac{t_{i1}^\alpha+t_{i2}^\alpha}{2},$$

即

$$\begin{aligned}&t_1^\alpha+t_2^\alpha+t_3^\alpha\ge3^{1-\alpha}(t_1+t_2+t_3)^\alpha=3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha,\\&t_{i1}^\alpha+t_{i2}^\alpha\ge2^{1-\alpha}(t_{i1}+t_{i2})^\alpha=2^{1-\alpha}(3r+1+\lambda_i)^\alpha.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}s_\alpha(\mu(G))\ge&3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+\sum_{i=2}^{n}2^{1-\alpha}(3r+1+\lambda_i)^\alpha\\\ge&3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+2^{1-\alpha}(n-1)^{1-\alpha}\Big(\sum_{i=2}^{n}(3r+1+\lambda_i)\Big)^\alpha\\=&3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+2^{1-\alpha}(n-1)^{1-\alpha}[(3r+1)(n-1)-r]^\alpha,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $t_1=t_2=t_3$, $t_{i1}=t_{i2}=\frac{1}{2}(3r+1+\lambda_i)$, $i=2,\cdots,n$ 且 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n$.

(ii) 考虑 $0<\alpha<1$ 的情形. 注意到当 $x>0$ 且 $0<\alpha<1$ 时， x^α 为上凸函数. 因此，通过类似 (i) 的讨论可得

$$s_\alpha(\mu(G))\le3^{1-\alpha}(4r+1+n)^\alpha+2^{1-\alpha}(n-1)^{1-\alpha}[(3r+1)(n-1)-r]^\alpha.$$

不等式 (18) 或 (19) 中等号成立当且仅当 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n$. 由 G 为 r 正则图知 $\lambda_1=r$. 因此，G 恰有两个不同的无符号拉普拉斯特征值. 从而由引理 2.5, 可知 $G\cong K_n$.

若不等式 (18) 或 (19) 中等号成立，G 必为完全图 K_n 且多项式 $t^3-(4r+1+n)t^2+(2r^2+4rn+3r)t-2r^2n$, 即 $t^3-(5n-3)t^2+(4n^2+n-5)t-2(n^3-2n^2+n)$ 必有三个相同的根．显然不可能出现这种情况．从而可得 (16) 或 (17). 证毕.

G 的 Double 图即 $\mathfrak{D}(G)$ 是顶点集为 $V(\mathfrak{D}(G)) = V(G) \cup V'(G)$, 其中 $V'(G) = \{x' : x \in V(G)\}$. 边集为 $E(\mathfrak{D}(G)) = E(G) \cup E'(G) \cup \{xy' : y' \in V'(G),\ xy \in E(G)\}$, 其中 $E'(G) = \{x'y' : x' \in V'(G),\ xy \in E(G)\}$.

定理 4.2 设 G 为具有 n 个顶点， m 条边的 r 正则图.

(i) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$, 则有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \geq (2r)^\alpha(n + 2^\alpha + (n-1)^{1-\alpha}(n-2)^\alpha). \tag{18}$$

(ii) 当 $0 < \alpha < 1$, 则有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \leq (2r)^\alpha(n + 2^\alpha + (n-1)^{1-\alpha}(n-2)^\alpha). \tag{19}$$

不等式 (20) 或 (21) 中等号成立当且仅当 $G \cong K_n$.

证类似定理 4.1 的证明．根据 $\mathfrak{D}(G)$ 的定义，可知 $\mathfrak{D}(G)$ 的邻接矩阵和度矩阵分别为

$$A(\mathfrak{D}(G)) = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \qquad D(\mathfrak{D}(G)) = \begin{pmatrix} 2rI_n & 0 \\ 0 & 2rI_n \end{pmatrix}.$$

由 $\mathfrak{D}(G)$ 的无符号拉普拉斯矩阵为 $Q(\mathfrak{D}(G)) = A(\mathfrak{D}(G)) + D(\mathfrak{D}(G))$ 且根据定理 4.1 的证明，有 $A = PDP^T$, 其中 P 是正交特征向量为 p_i 的正交矩阵，即对任意的 i,$Ap_i = \lambda_i p_i$. 从而有

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{D}(G)) &= \begin{pmatrix} A + 2rI_n & A \\ A & A + 2rI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^T + 2rI_n & PDP^T \\ PDP^T & PDP^T + 2rI_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D + 2rI_n & D \\ D & D + 2rI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & P^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令

$$C = \begin{pmatrix} D + 2rI_n & D \\ D & D + 2rI_n \end{pmatrix}.$$

根据 [37] 展开 $\det(tI_{2n} - C)$. 类似定理 4.1 的证明，可直接得到

$$|tI_{2n} - C| = (t-2r)^n \prod_{i=1}^{n} (t - 2\lambda_i - 2r) = (t-2r)^n 2^n P_{A(G)}\Big(\frac{t}{2} - r\Big).$$

因此，图 C 的谱，即 $\mathfrak{D}(G)$ 的无符号拉普拉斯谱为

$$\Big\{\underbrace{2r, \cdots, 2r}_{n},\ 4r,\ \underbrace{2(\lambda_2 + r), \cdots, 2(\lambda_n + r)}_{n-1}\Big\}.$$

从而有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) = n(2r)^\alpha + (4r)^\alpha + \sum_{i=2}^{n}(2(\lambda_i + r))^\alpha.$$

(i) 注意到当 $x > 0$, $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时， x^α 为下凸函数. 由引理 2.7, 可得

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}(2(\lambda_i + r))^\alpha}{n-1} \geq \Big(\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}2(\lambda_i + r)}{n-1}\Big)^\alpha = \Big(\frac{2r(n-2)}{n-1}\Big)^\alpha,$$

即

$$\sum_{i=2}^{n}(2(\lambda_i + r))^\alpha \geq (n-1)^{1-\alpha}(2r(n-2))^\alpha,$$

等号成立当且仅当 $2(\lambda_2 + r) = \cdots = 2(\lambda_n + r)$, 即 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

从而有

$$\begin{aligned} s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \geq & n(2r)^\alpha + (4r)^\alpha + (n-1)^{1-\alpha}(2r(n-2))^\alpha \\ = & (2r)^\alpha(n + 2^\alpha + (n-1)^{1-\alpha}(n-2)^\alpha). \end{aligned}$$

(ii) 考虑 $0 < \alpha < 1$ 的情形. 注意到当 $x > 0$ 且 $0 < \alpha < 1$ 时， x^α 为上凸函数. 因此，通过类似 (i) 的讨论可得

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \leq (2r)^\alpha(n + 2^\alpha + (n-1)^{1-\alpha}(n-2)^\alpha).$$

不等式 (20) 或 (21) 中等号成立当且仅当 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. 由 G 为 r 正则图知 $\lambda_1 = r$. 因此， G 恰有两个不同的无符号拉普拉斯特征值. 从而由引理 3.2.3, 可知 $G \cong K_n$.

反之，若 $G \cong K_n$, 显然不等式 (20) 或 (21) 中等号成立. 证毕.

定理 4.3 设 G 为具有 n_1 个 r_1 度顶点及 n_2 个 r_2 度顶点的半正则二部图，其中 $n_1 \geq n_2$.

(i) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时，有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \geq (2n_1 - n_2)(2r_1)^\alpha + n_2(2r_2)^\alpha + 2n_2(r_1 + r_2)^\alpha. \tag{20}$$

(ii) 当 $0 < \alpha < 1$ 时，有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \leq (2n_1 - n_2)(2r_1)^\alpha + n_2(2r_2)^\alpha + 2n_2(r_1 + r_2)^\alpha. \tag{21}$$

不等式 (22) 或 (23) 中等号成立当且仅当 G 为完全二部图.

证 注意到 $\mathfrak{D}(G)$ 的邻接矩阵和度矩阵分别为

$$A(\mathfrak{D}(G)) = \begin{pmatrix} A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) \end{pmatrix}, \qquad D(\mathfrak{D}(G)) = \begin{pmatrix} 2D(G) & 0 \\ 0 & 2D(G) \end{pmatrix},$$

其中 $A(G)$ 和 $D(G)$ 分别是 G 的邻接矩阵和度矩阵. 由 $\mathfrak{D}(G)$ 的无符号拉普拉斯矩阵为 $Q(\mathfrak{D}(G))=A(\mathfrak{D}(G))+D(\mathfrak{D}(G))$, 可得

$$Q(\mathfrak{D}(G))=\begin{pmatrix} A(G)+2D(G) & A(G) \\ A(G) & A(G)+2D(G)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2r_1I_{n_1} & K^T & 0 & K^T \\ K & 2r_2I_{n_2} & K & 0 \\ 0 & K^T & 2r_1I_{n_1} & K^T \\ K & 0 & K & 2r_2I_{n_2}\end{pmatrix},$$

其中 K 是 $n_2\times n_1$ 矩阵. 从而有

$$\begin{aligned}\left|xI-Q(\mathfrak{D}(G))\right|&=\begin{vmatrix} (x-2r_1)I_{n_1} & -K^T & 0 & -K^T \\ -K & (x-2r_2)I_{n_2} & -K & 0 \\ 0 & -K^T & (x-2r_1)I_{n_1} & -K^T \\ -K & 0 & -K & (x-2r_2)I_{n_2}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} (x-2r_1)I_{n_1} & 0 & (2r_1-x)I_{n_1} & 0 \\ 0 & (x-2r_2)I_{n_2} & 0 & (2r_2-x)I_{n_2} \\ 0 & 0 & (x-2r_1)I_{n_1} & -2K^T \\ 0 & 0 & 0 & (x-2r_2)I_{n_2}-\frac{4KK^T}{x-2r_1}\end{vmatrix}\\
&=(x-2r_1)^{2n_1}(x-2r_2)^{n_2}\left|(x-2r_2)I_{n_2}-\frac{4KK^T}{x-2r_1}\right|\\
&=(x-2r_1)^{2n_1-n_2}(x-2r_2)^{n_2}\left|(x-2r_1)(x-2r_2)I_{n_2}-4KK^T\right|.\end{aligned}$$

已知

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & K^T \\ K & 0\end{pmatrix},\qquad A(G)^2=\begin{pmatrix} K^TK & 0 \\ 0 & KK^T\end{pmatrix}.$$

令 $P_M(x)$ 为矩阵 M 的特征多项式,可知 $P_{K^TK}(x)=x^{n_1-n_2}P_{KK^T}(x)$, 因此 $P_{A(G)^2}(x)=x^{n_1-n_2}P_{KK^T}(x)^2$. 已知 $A(G)^2$ 的特征值是 $A(G)$ 特征值的平方，由引理 2.6 知 $A(G)$ 特征值关于 0 对称，则有 $P_{A(G)^2}(x)=P_{A(G)}(\sqrt{x})^2$. 由上述可得

$$P_{KK^T}(x)=\sqrt{\frac{P_{A(G)^2}(x)}{x^{n_1-n_2}}}=\sqrt{x^{n_2-n_1}}P_{A(G)}(\sqrt{x}).$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $A(G)$ 的特征值, 由等式 (24) 可知 KK^T 的特征值为 λ_i^2, $i=1,\cdots,n_2$. 因此

$$\begin{aligned}\left|xI-Q(\mathfrak{D}(G))\right|&=(x-2r_1)^{2n_1-n_2}(x-2r_2)^{n_2}\prod_{i=1}^{n_2}[(x-2r_1)(x-2r_2)-4\lambda_i^2]\\
&=(x-2r_1)^{2n_1-n_2}(x-2r_2)^{n_2}\prod_{i=1}^{n_2}[x^2-2(r_1+r_2)x+4r_1r_2-4\lambda_i^2].\end{aligned}$$

因此，半正则二部图 G 的 Double 图 $\mathfrak{D}(G)$ 的无符号拉普拉斯特征值为 $2n_1-n_2$ 等于 $2r_1$,n_2 等于 $2r_2$, 其余 $2n_2$ 个为：

$$t_{i1,i2}=\frac{1}{2}\left[2(r_1+r_2)\pm\sqrt{4(r_1+r_2)^2+16\lambda_i^2-16r_1r_2}\right],\qquad i=1,2,\cdots,n_2.$$

从而有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) = (2n_1 - n_2)(2r_1)^\alpha + n_2(2r_2)^\alpha + \sum_{i=1}^{n_2}(t_{i1}^\alpha + t_{i2}^\alpha).$$

(i) 注意到当 $x > 0$, $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时, x^α 为下凸函数. 由 Jensen's Inequality, 可得

$$\left(\frac{t_{i1} + t_{i2}}{2}\right)^\alpha \leq \frac{t_{i1}^\alpha + t_{i2}^\alpha}{2},$$

即

$$t_{i1}^\alpha + t_{i2}^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(t_{i1} + t_{i2})^\alpha = 2^{1-\alpha}(2(r_1 + r_2))^\alpha = 2(r_1 + r_2)^\alpha$$

等号成立当且仅当 $t_{i1} = t_{i2} = r_1 + r_2$, $i = 1, 2, \cdots, n_2$. 从而有

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \geq (2n_1 - n_2)(2r_1)^\alpha + n_2(2r_2)^\alpha + 2n_2(r_1 + r_2)^\alpha.$$

(ii) 考虑 $0 < \alpha < 1$ 的情形. 注意到当 $x > 0$ 且 $0 < \alpha < 1$ 时, x^α 为上凸函数. 因此，通过类似 (i) 的讨论可得

$$s_\alpha(\mathfrak{D}(G)) \leq (2n_1 - n_2)(2r_1)^\alpha + n_2(2r_2)^\alpha + 2n_2(r_1 + r_2)^\alpha.$$

不等式 (22) 或 (23) 中等号成立当且仅当 $t_{i1} = t_{i2} = r_1 + r_2$, $i = 1, 2, \cdots, n_2$. 注意到 $\mathfrak{D}(G)$ 恰有三个不同的无符号拉普拉斯特征值. 由引理 2.5, 可知 G 是直径至多为 2 的半正则二部图. 从而可知 G 为完全二部图.

反之，若 G 为完全二部图，显然不等式 (22) 或 (23) 中等号成立. 证毕.

注 令 $\alpha = 1/2$ 时，即可由以上的结论得到关联能量的上下界.

参 考 文 献

[1] Gutman I, Kiani D, Mirzakhah M. On incidence energy of a graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2009, 62: 573–580

[2] Cvetković D, Rowlinson P, Simić S K. Signless Laplacians of finite graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2007, 423: 155–171

[3] Ashraf F. On two conjectures on sum of the powers of signless Laplacian eigenvalues of a graph. *Linear and Multilinear Algebra*, 2016, 64: 1314–1320

[4] Cvetković D, Simić S K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian II. *Lin. Algebra Appl.*, 2010, 423: 2257–2277

[5] You L, Yang J. Notes on the sum of powers of the signless Laplacian eigenvalues of graphs. *Ars Combinatoria*, 2014, 117: 85–94

[6] Gutman I. The energy of a graph. Ber. Math. Statist. *Sekt. Forschungsz. Graz.*, 1978, 103: 1–22

[7] Gutman I. The energy of a graph: old and new results. In: Betten, A., Kohnert, A., Laue, R., Wassermann, A. (Eds.), Algebraic Combinatorics and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 196–211

[8] Li X, Shi Y, Gutman I. Graph Energy. New York: Springer, 2012

[9] Nikiforov V. The energy of graphs and matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 326: 1472–1475

[10] Jooyandeh M, Kiani D, Mirzakhah M. Incidence energy of a graph. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2009,62: 561–572

[11] Das K C, Gutman I. On incidence energy of graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2014, 446: 329–344

[12] Gutman I, Kiani D, Mirzakhah M, Zhou B. On incidence energy of a graph. *Lin. Algebra Appl.*, 2009, 431: 1223–1233

[13] Zhou B. More upper bounds for the incidence energy. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2010, 64: 123–1228

[14] Liu J, Liu B. A Laplacian-energy like invariant of a graph. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2008, 59: 397–419

[15] Gutman I, Zhou B. Laplacian energy of a graph. *Lin. Algebra Appl.*, 2006, 414: 29–37

[16] Gutman I, Zhou B, Furtula B. The Laplacian-energy like invariant is an energy like invariant. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2010, 64: 85–96

[17] Ilić A, Krtinić D, Ilić M. On Laplacian like energy of trees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2010, 64: 111–122

[18] Liu B, Huang Y, You Z. A survey on the Laplacian-energy-like invariant. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2011, 66: 713–730

[19] Zhou B. On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2008, 429: 2239–2246

[20] Bonchev D, Balaban A T, Liu X, Klein D J. Molecular cyclicity and centricity of polycyclic graphs: I. Cyclicity based on resistance distances or reciprocal distances. *Int. J. Quantum Chem.*, 1994, 50: 1–20

[21] Gutman I, Mohar B. The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 1996, 36: 982—945

[22] Palacios J. Foster's formulas, probability and the Kirchhoff index. *Methodol. Comput. Appl. Probob.*, 2004, 6: 381–387

[23] Das K C, Xu K, Liu M. On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2013, 439: 3561–3575

[24] Liu M, Liu B. A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs. *Appl. Math. Lett.*, 2011, 24: 249–252

[25] Tian G X, Huang T Z, Zhou B. A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2009, 430: 2503–2510

[26] Zhou B, Ilić A. On the sum of powers of Laplacian eigenvalues of bipartite graphs. *Czehoslovak Math. J.*, 2010, 135, 60: 1161–1169

[27] Akbari S, Ghorbani E, Koolen J H, Oboudi M R. On sum of powers of the Laplacian and signless Laplacian eigenvalues of graphs. *El. J. Comb.*, 2010, 17: 115–118

[28] Merris R. A survey of graph Laplacians. *Lin. Multilin. Algebra.*, 1995, 39: 19–31

[29] Bozkurt S B, Bouzkurt D. Note on the Sum of Powers of Signless Laplacian Eigenvalues of Graphs. *Eprint. Arxir.*, 2014, 56: 1411–1485

[30] Bozkurt S B, Gutman I. Estimating the incidence energy. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2013,70: 43–156

[31] Li R. On α-Incidence Energy and α-Distance Energy of a Graph. *Ars Combin.*, 2010, 15: 112–118

[32] Li R. On α-incidence energy and α-distance energy of a graph. *Ars Combin.*, 2015, 121: 373–384

[33] Ccetković D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graphs. New York: Academic Press, 1980

[34] Ning W J, Li H, Lu M. On the signless Laplacian spectral radius of irregular graphs. *Lin. Algebra Appl.*, 2013, 438: 2280–2288

[35] Cvetković D, Rowlinson P, Simić S. An Introduction to the Theory of Graph Spectra. New York: Cambridge University Press, 2010

[36] Mycielski J. Sur le coloriage des graphs. *Colloq. Math.*, 1995, 3: 161–162

[37] Ferrar W L. A Text-Book of Determinants, Matrices and Algebraic Forms. Oxford University Press, 1953

Bounds for the Sum of αth Powers of the Signless Laplacian Eigenvalues of Some Graphs

CHEN Yizhen XU Liqiong[†]

(*School of Science, Jimei University, Xiamen* 361021, *China*)

([†] *E-mail: xuliqiong@jmu.edu.cn*)

Abstract Let G be a simple graph. The graph invariant $s_\alpha(G)$ is equal to the sum of αth powers of the signless Laplacian eigenvalues of G, for any real α ($\alpha \neq 0, 1$). In this paper, we obtain some new bounds for $s_\alpha(G)$ of connected graphs. Moreover, we also give some new bounds for $s_\alpha(G)$ of the *Mycielskian* of a regular graph and the *Double* graph of regular and semi-regular bipartite graphs. These results yield, as immediate special cases, bounds for the incidence energy.

Key words αth powers of the signless Laplacian eigenvalues; Mycielskian graph; Double graph

MR(2000) Subject Classification 05C15

Chinese Library Classification O157.1