第 41 卷 第 4 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 41 No. 4
2018 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2018

p-Laplacian 分数阶微分方程边值问题正解的存在性 *

田元生 李小平
(E-mail: tys73@163.com)
(湘南学院数学与金融学院，郴州 423000)

葛渭高
(北京理工大学理学院，北京 100081)

摘 要 在这篇文章，我们讨论了一类 p-Laplacian 分数阶微分方程边值问题正解的存在性，应用凸锥上的不动点定理，我们得到了这类边值问题至少存在一个和两个正解的充分条件.

关键词 分数阶微分方程； p-Laplacian; 边值问题；正解

MR(2000) 主题分类 34B15; 34B18

中图分类 O175.8

1 引言

在本文，我们研究了下列 p-Laplacian 分数阶微分方程边值问题的正解的存在性和多重性

$$\begin{cases} D^{\beta}(\phi_p(D^{\alpha}u(t))) = f(t,u(t)), & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u(1)=D^{\alpha}u(0)=0, & D^{\alpha}u(1)=\lambda D^{\alpha}u(\xi), \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, $2<\alpha\le 3$, $1<\beta\le 2$, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$, $\phi_q=(\phi_p)^{-1}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $\xi\in(0,1)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, D^{α} 表示 “Riemann-Liouville” 分数阶导数， $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$. 我们应用凸锥上的不动点定理，得到了这类边值问题至少存在一个和两个正解的充分条件.

最近，分数阶微分方程得到了广泛关注，国内外许多学者进行了深入研究，并取得了很多成果，具体的详见 [1–10]. 例如， [6] 应用叠合度理论，研究了下面分数阶微分方

本文 2017 年 8 月 4日收到. 2018 年 5 月 1 日收到修改稿.
* 湖南省教育厅重点科研项目 (16A198); 湖南省重点建设学科；湖南省自然科学基金 (2015JJ6101) 项目资助.

程边值问题解的存在性

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t), u'(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u'(0) - \beta u(\xi) = 0, \qquad u'(1) + \gamma u(\eta) = 0, \end{cases}$$

这里 $1 < \alpha \le 2$ 是一个实数， D^α 表示 “Caputo” 分数阶导数. [9] 应用凸锥上的不动点定理，研究了下面分数阶微分方程边值问题正解的多重性

$$\begin{cases} -D^\alpha x(t) = p(t) f(t, x(t)) - q(t), \qquad 0 < t < 1, \\ x(0) = x'(0) = 0, \qquad u(1) = 0, \end{cases}$$

这里 $2 < \alpha \le 3$ 是一个实数， D^α 表示 “Riemann-Liouville” 分数阶导数.

另一方面，由于 p-Laplacian 微分方程的边值问题在非牛顿力学，宇宙物理，血浆问题和弹性理论等诸多领域都有广泛的应用，近几年，也有很多学者研究了这方面的问题. 详情见参考 [11–15]. 例如， [11] 研究了下面 p-Laplacian 四点边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + a(t) f(u(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ \alpha\phi_p(u(0)) - \beta\phi_p(u'(\xi)) = 0, \qquad \gamma\phi_p(u(1)) - \delta\phi_p(u'(\eta)) = 0, \end{cases}$$

这里 $\phi_p(s)$ 是 p-Laplacian operator, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s,\ p > 1,\ \phi_q = (\phi_p)^{-1},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 作者应用不动点指数理论，获得了这类问题存在正解的充分条件.

2 预备知识

在这一节，我们首先给出 “Riemann-Liouville” 分数阶导数和积分的定义，并且为证明本文的主要结果做一些必要的的准备工作.

定义 2.1[16] α 是一正实数，函数 $x : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 的 α 阶 ”Riemann-Liouville” 积分为

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)\,\mathrm{d}s,$$

只要等式的右端在 $(0, \infty)$ 有定义.

定义 2.2[16] α 是一正实数，连续函数 $x : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 的 α 阶 “Riemann-Liouville” 导数为

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^n \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}s,$$

只要等式的右端在 $(0, \infty)$ 有定义，其中 $n = [\alpha] + 1$.

引理 2.1[16] 如果 $x \in C(0,1) \cap L(0,1)$ 且阶为 $\alpha > 0$ 分数导数属于 $C(0,1) \cap L(0,1)$, 则

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_N t^{\alpha-N}, \qquad c_i \in \mathbf{R},\ \ i = 1, 2, \cdots, N.$$

这里 N 是大于或等于 α 的最小整数.

引理 2.2　如果 $y\in C[0,1]$, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$, $\phi_q=(\phi_p)^{-1}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $2<\alpha\le 3$, $1<\beta\le 2$ 且 $\xi\in(0,1)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, $\mathcal{M}:=\lambda^{p-1}\xi^{\gamma-1}$, 则边值问题

$$\begin{cases} D^\beta(\phi_p(D^\alpha u(t)))=y(t), & 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=u(1)=D^\alpha u(0)=0, & D^\alpha u(1)=\lambda D^\alpha u(\xi)\end{cases}\tag{2.1}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

这里

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}[t(1-s)]^{\alpha-1}, & 0\le t\le s\le 1,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\big([t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\big), & 0\le s\le t\le 1.\end{cases}\tag{2.2}$$

$$H(t,s)=\begin{cases}\dfrac{[t(1-s)]^{\beta-1}-\lambda^{p-1}[t(\xi-s)]^{\beta-1}-(1-\mathcal{M})(t-s)^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)},\\ \qquad 0\le s\le t\le 1,\quad s\le\xi,\\ \dfrac{[t(1-s)]^{\beta-1}-(1-\mathcal{M})(t-s)^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}, & 0<\xi\le s\le t\le 1,\\ \dfrac{[t(1-s)]^{\beta-1}-\lambda^{p-1}[t(\xi-s)]^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}, & 0\le t\le s\le\xi<1,\\ \dfrac{[t(1-s)]^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}, & 0\le t\le s\le 1,\quad \xi\le s.\end{cases}\tag{2.3}$$

证　由引理 2.1, 我们有

$$\phi_p(D^\alpha u(t))=I^\beta y(t)+c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2},\tag{2.4}$$

$c_1,c_2\in\mathbf{R}$. 由 $D^\alpha u(0)=0$, 我们得 $c_2=0$, 从而,

$$\phi_p(D^\alpha u(t))=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+c_1t^{\beta-1}.\tag{2.5}$$

因此,

$$\phi_p(D^\alpha u(1))=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+c_1,\tag{2.6}$$

$$\phi_p(D^\alpha u(\xi))=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\beta-1}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+c_1\xi^{\beta-1}.\tag{2.7}$$

由 $D^\alpha u(1)=\lambda D^\alpha u(\xi)$, 结合 (2.6) 与 (2.7), 我们有

$$c_1=-\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)(1-\mathcal{M})}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^\xi\frac{\lambda^{p-1}(\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)(1-\mathcal{M})}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

因此,

$$\begin{aligned}\phi_p(D^\alpha u(t)) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)(1-\mathcal{M})} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \int_0^\xi \frac{\lambda^{p-1} t^{\beta-1}(\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)(1-\mathcal{M})} y(\tau)\,d\tau \\ &= -\int_0^1 H(t,\tau) y(\tau)\,d\tau,\end{aligned}$$

所以,

$$D^\alpha u(t) + \phi_q\Big(\int_0^1 H(t,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) = 0. \tag{2.8}$$

由引理 2.1, 我们可得

$$u(t) = -I^\alpha \phi_q\Big(\int_0^1 H(t,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) + d_1 t^{\alpha-1} + d_2 t^{\alpha-2} + d_3 t^{\alpha-3}, \tag{2.9}$$

$d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{R}$. 由 $u(0) = u'(0) = 0$, 得 $d_2 = d_3 = 0$. 因此,

$$\begin{aligned}u(t) &= -I^\alpha \phi_q\Big(\int_0^1 H(t,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) + d_1 t^{\alpha-1} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s + d_1 t^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

由 $u(1) = 0$, 我们得

$$d_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

所以,边值问题 (2.1) 的唯一解为

$$\begin{aligned}u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [t(1-s)]^{\alpha-1}\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)y(\tau)d\tau\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

证毕.

引理 2.3 令 $q(t) = t(1-t)^{\alpha-1}$, 格林函数 $G(t,s)$ 和 $K(t,s)$ 有下列性质

(1) $G(t,s) = G(1-s, 1-t)$, $G(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$, $G(t,s) > 0$ 对于 $s,t \in (0,1)$;

(2) $\frac{q(1-t)q(s)}{\Gamma(\alpha)} \le G(t,s) \le \frac{(\alpha-1)q(s)}{\Gamma(\alpha)}$ 对于 $t,s \in [0,1]$;

(3) $\frac{q(1-t)q(s)}{\Gamma(\alpha)} \le G(t,s) \le \frac{(\alpha-1)q(1-t)}{\Gamma(\alpha)}$ 对于 $t,s \in [0,1]$;

(4) $H(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$, 且如果 $1 - \mathcal{M} \ge \prime$, 则 $H(t,s) > 0$ 对于 $t,s \in (0,1)$.

证　(1) 显然成立. 而 (3) 可以通过 (1) 和 (2) 直接得到，所以，我们仅证 (2) 和 (4).

(2) 当 $0\le s\le t\le 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}G(t,s)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big([t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\big)\\=&\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-s}^{t(1-s)}x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x\\\le&\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}[t(1-s)]^{\alpha-2}[t(1-s)-(t-s)]\\\le&\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-2}s(1-t)\le\frac{(\alpha-1)q(s)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

又，因为 $0<\alpha-2\le 1$, 所以，

$$\begin{aligned}G(t,s)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big([t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\big)\ge\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big([t(1-s)]^{\alpha-2}[t(1-s)]-(t-s)]\big)\\=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}[t(1-s)]^{\alpha-2}s(1-t)\ge\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}s(1-t)\\=&\frac{q(s)q(1-t)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

当 $0\le t\le s\le 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}G(t,s)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\\\le&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)s(1-s)^{\alpha-1}\le\frac{(\alpha-1)q(s)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

又

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\ge\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}s(1-t)=\frac{q(s)q(1-t)}{\Gamma(\alpha)}.$$

因此，$\frac{q(1-t)q(s)}{\Gamma(\alpha)}\le G(t,s)\le\frac{(\alpha-1)q(s)}{\Gamma(\alpha)}$ 对于 $t,s\in[0,1]$.

(4) 显示 $H(t,s)\in C([0,1]\times[0,1])$. 当 $0<s\le t<1, s\le\xi$ 时，令

$$h(t,s)=\frac{[t(1-s)]^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

当 $0<s\le t<1$ 时，显然有 $h(t,s)>0$. 因此，我们有

$$\begin{aligned}H(t,s)=&\frac{[t(1-s)]^{\beta-1}-\lambda^{p-1}[t(\xi-s)]^{\beta-1}-(1-\mathcal{M})(t-s)^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}\\=&\Big(1+\frac{\mathcal{M}}{1-\mathcal{M}}\Big)\frac{[t(1-s)]^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}-\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}-\frac{\lambda^{p-1}[t(\xi-s)]^{\beta-1}}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}\\=&\frac{[t(1-s)]^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{\lambda^{p-1}t^{\beta-1}[\xi^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(\xi-s)^{\beta-1}]}{(1-\mathcal{M})\Gamma(\beta)}\\=&h(t,s)+\frac{\lambda^{p-1}t^{\beta-1}}{1-\mathcal{M}}h(\xi,s)>0.\end{aligned}$$

类似地，当 $0<\eta\le s\le t<1$ 或 $0<t\le s\le\eta<1$ 或 $0<t\le s<1,\ \eta\le s$ 时，我们可以获得 $H(t,s)>0$. 所以，当 $t,s\in(0,1)$ 时，有 $H(t,s)>0$. 证毕.

令 $E=C[0,1]$ 是 Banach 空间，其范数定义为 $\|u\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|u(t)|$. 令

$$K=\Big\{u\in E\mid u(t)\ge\frac{q(1-t)}{\alpha-1}\|u\|,\ 0\le t\le 1\Big\},$$

则 K 是 E 上一个锥.

引理 2.4 对任意 $u\in K$, 定义算子 $T:K\to E$,

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

则 $T:K\to K$ 是全连续的.

证 对任意的 $u\in K$, 由引理 2.4, 我们有

$$Tu(t)\le\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

另一方面

$$Tu(t)\ge\frac{q(1-t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s.$$

因此 $Tu(t)\ge\frac{q(1-t)}{\alpha-1}\|Tu\|$, 所以得 $T:K\to K$. 进一步，由 Arzela-Ascoli 定理和勒贝格控制收敛定理不难得到 $T:K\to K$ 是全连续的. 证毕.

为了证明我们的主要结论，还要用到下面著名的 Krasnosel'skii 不动点定理.

引理 2.5[17] 设 E 是 Banach 空间， $K\subset E$ 是 E 的一个锥， Ω_1,Ω_2 是 E 的有界开子集， $0\in\Omega_1,\bar\Omega_1\subset\Omega_2$, 如果全连续算子 $T:K\cap(\bar\Omega_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(A_1) $\|Tx\|\le\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tx\|\ge\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_2$ 或

(A_2) $\|Tx\|\ge\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tx\|\le\|x\|,\ x\in K\cap\partial\Omega_2$, 则 T 在 $K\cap(\bar\Omega_2\backslash\Omega_1)$ 上至少有一个不动点.

3 正解的存在性

在这一节, 我们讨论边值问题 (1.1) 正解的存在性. 为了方便我们还引用下面记号.

$$f_0=\lim_{u\to+0}\inf\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u^{p-1}},\qquad f^0=\lim_{u\to+0}\sup\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u^{p-1}},$$

$$f_\infty=\lim_{u\to+\infty}\inf\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u^{p-1}},\qquad f^\infty=\lim_{u\to+\infty}\sup\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u^{p-1}},$$

$$\rho_*=\Big(\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s\Big)^{-1},$$

$$\rho^*=\Big(\frac{q(\frac12)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_{\frac14}^{\frac34} H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s\Big)^{-1},\qquad \sigma=\min_{1/4\le t\le 3/4}\frac{q(1-t)}{\alpha-1}.$$

并建立下列条件：

(C_1) $f_0 \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$ (特别地 $f_0 = \infty$)，$f_\infty \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$ (特别地 $f_\infty = \infty$).

(C_2) $f^0 \in [0, \rho_*^{p-1})$，$f^\infty \in [0, \rho_*^{p-1})$.

(C_3) 存在常数 $d \in (0, \rho_*)$ 和 $\lambda_1 > 0$, 使得

$$f(t,u) \le (d\lambda_1)^{(p-1)}, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad 0 \le u \le \lambda_1.$$

(C_4) 存在常数 $D \in (\rho^*, \infty)$ 和 $\lambda_2 > 0$ 使得

$$f(t,u) \ge (D\lambda_2)^{(p-1)},\ 1/4 \le t \le 3/4,\ \sigma\lambda_2 \le u \le \lambda_2.$$

定理 4.1 如果条件 (C_1), (C_3) 成立，则边值问题 (1.1) 至少有两个正解 u_1 和 u_2, 且 $0 < \|u_1\| < \lambda_1 < \|u_2\|$.

证　首先，由条件 (C_3) 知，存在常数 $d \in (0, \rho_*)$ 和 $\lambda_1 > 0$, 使得

$$f(t,u) \le (d\lambda_1)^{(p-1)}, \qquad 0 \le t \le 1,\quad 0 \le u \le \lambda_1.$$

令 $\Omega_{\lambda_1} = \{u \in K \mid \|u\| < \lambda_1\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{\lambda_1}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1} |Tu(t)| \\ &\le \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)(d\lambda_1)^{(p-1)}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &\le \rho_*\lambda_1 \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \lambda_1 = \|u\|.\end{aligned}$$

所以，$\|Tu\| \le \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{\lambda_1}$.

另一方面，由条件 (C_1) 中的 $f_0 \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$, 知存在常数 $0 < r_1 < \lambda_1$, 当 $0 < u \le r_1$, 有 $f(t,u) \ge u^{p-1}(\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}$. 令 $\Omega_{r_1} = \{u \in K \mid \|u\| < r_1\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{r_1}$, 我们有

$$r_1 = \|u\| \ge u(t) \ge \frac{q(1-t)}{\alpha-1}\|u\| \ge \sigma\|u\| = \sigma r_1, \qquad t \in [1/4, 3/4].$$

因此，

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1} |Tu(t)| \\ &= \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ &\ge \int_0^1 G\Big(\frac12, s\Big)\phi_q\Big(\int_{\frac14}^{\frac34} H(s,\tau) u^{p-1}(\tau)\Big(\frac{\rho^*}{\sigma}\Big)^{p-1}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\geq \frac{r_1\rho^*}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q\Big(\frac{1}{2}\Big)q(s)\phi_q\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = r_1 = \|u\|.$$

所以， $\|Tu\| \geq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{r_1}$.

又,由 $f_\infty \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$, 知存在常数 $R^* > 0$, 当 $u \geq R^*$ 时,有 $f(t,u) \geq u^{p-1}\big(\frac{\rho^*}{\sigma}\big)^{p-1}$.

选择 $R_1 = \max\big\{2\lambda_1, \frac{R^*}{\sigma}\big\}$, 令 $\Omega_{R_1} = \{u \in K \mid \|u\| < R_1\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{R_1}$ 时，我们有

$$R_1 = \|u\| \geq u(t) \geq \frac{q(1-t)}{\alpha-1}\|u\| \geq \sigma\|u\| = \sigma R_1 \geq R^*, \qquad t \in [1/4, 3/4].$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{0\leq t\leq 1}|Tu(t)| \\
&= \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\geq \int_0^1 G\Big(\frac{1}{2},s\Big)\phi_q\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} H(s,\tau)u^{p-1}(\tau)\Big(\frac{\rho^*}{\sigma}\Big)^{p-1}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{R_1\rho^*}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q\Big(\frac{1}{2}\Big)q(s)\phi_q\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = R_1 = \|u\|.
\end{aligned}$$

所以， $\|Tu\| \geq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{R_1}$.

所以，由引理 2.5 知， T 至少有两个不动点 $u_1 \in (\Omega_{\lambda_1} \setminus \overline{\Omega}_{r_1})$ 和 $u_2 \in (\Omega_{R_1} \setminus \overline{\Omega}_{\lambda_1})$. 即边值问题 (1.1) 至少有两个正解 u_1 和 u_2, 且 $0 < \|u_1\| < \lambda_1 < \|u_2\|$. 证毕.

定理 4.2 如果条件 (C_2), (C_4) 成立，则边值问题 (1.1) 至少有两个正解 u_1 和 u_2, 且 $0 < \|u_1\| < \lambda_2 < \|u_2\|$.

证 首先，由条件 (C_4) 知，存在常数 $D \in (\rho^*, \infty)$ 和 $\lambda_2 > 0$ 使得

$$f(t,u) \geq (D\lambda_2)^{(p-1)}, \qquad 1/4 \leq t \leq 3/4, \qquad \sigma\lambda_2 \leq u \leq \lambda_2.$$

令 $\Omega_{\lambda_2} = \{u \in K \mid \|u\| < \lambda_2\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{\lambda_2}$, 我们有

$$\lambda_2 = \|u\| \geq u(t) \geq \frac{q(1-t)}{\alpha-1}\|u\| \geq \sigma\|u\| = \sigma\lambda_2, \qquad t \in [1/4, 3/4].$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{0\leq t\leq 1}|Tu(t)| \\
&= \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\geq \int_0^1 G\Big(\frac{1}{2},s\Big)\phi_q\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} H(s,\tau)(D\lambda_2)^{(p-1)}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{\lambda_2\rho^*}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 q\Big(\frac{1}{2}\Big)q(s)\phi_q\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = \lambda_2 = \|u\|.
\end{aligned}$$

所以， $\|Tu\| \geq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{\lambda_2}$.

另一方面，由条件 (C_2) 中的 $f^0 \in [0, \rho_*^{p-1})$, 存在常数 $0 < r_2 < \lambda_2$, 当 $0 < u \leq r_2$ 时，有 $f(t,u) \leq u^{p-1}\rho_*^{p-1} \leq (r_2\rho_*)^{p-1}$. 令 $\Omega_{r_2} = \{u \in K \mid \|u\| < r_2\}$. 因此，当 $u \in \partial\Omega_{r_2}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|Tu\| =& \max_{0\leq t\leq 1} |Tu(t)| \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)(r_2\rho_*)^{p-1}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ =& r_2\rho_*\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = r_2 = \|u\|.\end{aligned}$$

所以， $\|Tu\| \leq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{r_2}$.

又，由 $f^\infty \in [0, \rho_*^{p-1})$, 存在正常数 R^*, 当 $u \geq R^*$ 时，我们有 $f(t,u) \leq u^{p-1}\rho_*^{p-1}$. 下面我们分 f 有界或无界两种情形进行证明.

情形 1 如果 f 在 $[0,\infty)$ 上有界，则存在常数 $G > 0$ 使得 $f(t,u) \leq G^{p-1}\rho_*^{p-1}$ 对 $t \in [0,1]$, $u \in [0,\infty)$. 选取 $R_2 = \max\{2\lambda_2, G\}$, 令 $\Omega_{R_2} = \{u \in K \mid \|u\| < R_2\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{R_2}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|Tu\| =& \max_{0\leq t\leq 1} |Tu(t)| \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)G^{p-1}\rho_*^{p-1}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ \leq& R_2\rho_*\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = R_2 = \|u\|.\end{aligned}$$

因此， $\|Tu\| \leq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{R_2}$.

情形 2 如果 f 在 $[0,\infty)$ 上无界，则存在常数 $R_2 > \max\{2\lambda_2, R^*\}$, 使得 $f(t,u) \leq f(t,R_2)$ 对 $t \in [0,1]$, $u \in (0,R_2)$. 令 $\Omega_{R_2} = \{u \in K \mid \|u\| < R_2\}$. 当 $u \in \partial\Omega_{R_2}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|Tu\| =& \max_{0\leq t\leq 1} |Tu(t)| \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ \leq& \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,R_2)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s \\ \leq& R_2\rho_*\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(s)\phi_q\Big(\int_0^1 H(s,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}s = R_2 = \|u\|.\end{aligned}$$

因此， $\|Tu\| \leq \|u\|$ 对于 $u \in \partial\Omega_{R_2}$.

所以，由引理 2.5 知，T 至少有两个不动点 $u_1 \in (\Omega_{\lambda_2} \setminus \overline{\Omega}_{r_2})$ 和 $u_2 \in (\Omega_{R_2} \setminus \overline{\Omega}_{\lambda_2})$. 即边值问题 (1.1) 至少有两个正解 u_1 和 u_2, 且 $0 < \|u_1\| < \lambda_2 < \|u_2\|$. 证毕.

从上面两个证明中，我们不难得到下面的推论.

推论 3.1 如果条件 (C_3) 和 (C_4) 成立，则边值问题 (1.1) 至少有一个正解.

推论 3.2 如果条件 $f^0 \in [0, \rho_*^{p-1})$ 和 $f_\infty \in ((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty)$ 成立，则边值问题 (1.1) 至少有一个正解.

推论 3.3 如果条件 $f_0 \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$ 和 $f^\infty \in [0, \rho_*^{p-1})$ 成立，则边值问题 (1.1) 至少有一个正解.

推论 3.4 如果条件 (C_3) 成立，且 $f_\infty \in \big((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty\big)$ (或 $f_0 \in ((\frac{\rho^*}{\sigma})^{p-1}, \infty)$) 也成立，则边值问题 (1.1) 至少有一个正解.

推论 3.5 如果条件 (C_4) 成立，且条件 $f^0 \in [0, \rho_*^{p-1})$(或 $f^\infty \in [0, \rho_*^{p-1})$) 也成立，则边值问题 (1.1) 至少有一个正解.

参 考 文 献

[1] 晓婕，孙新国，吕炜．非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在性． 数学物理学报, 2011, 31A(2): 401–409

(Xiao J, Sue X, Lv W. The existence of positive solutions of a nonlinear boundary value problem for fractional differential equations. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, 31A(2): 401–409)

[2] 蔡宁宁，苏新卫，张淑琴．一类分数阶微分方程边值问题解的存在性． 郑州大学学报 (理学版), 2017, 49(2): 7–13

(Cai N, Su X, Zhang S. The existence of solutions of a class boundary value problem for fractional differential equations. *Journal of Zhengzhou University (Natural Science Edition)*, 2017, 49(2): 7–13)

[3] Bai Z. Solvability for a class of fractional m-point boundary value problem at resonance. *Comp. Math. Appl.*, 2011, 62(3): 1292–1302

[4] Cui Y. Uniqueness of solution for boundary value problems for fractional differential equations. *Appl. Math. Lett.*, 2016, 51: 48–54

[5] Wang Y, Liu L, Wu Y. Positive solutions for a class of fractional boundary problem with changing sign nonlinearity. *Nonlinear Anal.*, 2011, 74: 6434–6441

[6] Tang X. Existence of solutions of four-point boundary value problems for fractional differential equations at resonance. *J. Appl. Math. Comp.*, 2016, 51: 145–160

[7] Tian Y, Bai, Z. Existence results for the three-point impulsive boundary value problem involving fractional differential equations. *Comp. Math. Appl.*, 2010, 59: 2601–2609

[8] Zhang S. Existence of a solution for the fractional differential equation with nonlinear boundary conditions. *Comp. Math. Appl.*, 2011, 61: 1202–1208

[9] Zhang X, Liu L, Wu Y. Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbedterm. *Math. Comput. Mode.*, 2012, 55: 1263–1274

[10] Zhou Y, Tian Y, He Y. Floquet Boundary Value Problem of fractional differential equation, Electron. *J. Qualitative Theory Diff. Equ.*, 2010, 50: 1–13

[11] Su H, Wei Z, Wang, B. The existence of positive solutions for a nonlinear four-point singular boundary value problem with a p-Laplacian operator. *Nonlinear Anal.*, 2007, 66: 2204–2217

[12] Wang Y, Hou C. Existence of multiple positive solutions for one dimensional p-Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 315: 144–153

[13] Tian Y, Chen A, Ge W. Multiple positive solutions to multipoint one-dimensional p-Laplacian boundary value problem with impulsive effects. *Czech. Math. Jour.*, 2011, 61: 127–144

[14] Zhang L, Ge W. Existence of Three Positive Solutions for Three-order differential equations of boundary value problem with p-Laplacian. *Syst. Scie. Math. Scie.*, 2011, 31(7): 837–844

[15] Zhang X, Ge, W. Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional p-Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 2009, 70: 1692–1701

[16] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science B.V.: Amsterdam, 2006

[17] Krasnosel'skii M A. Positive solutions of operator equations. Noordhoff: Groningen, 1964

Existence of Positive Solutions to Boundary Value Problem of Fracctional Differential Equation with P-Laplacian

TIAN Yuansheng LI Xiaoping

(*College of Mathematics and Finance, Xiangnan University, Chenzhou* 432000*, China*)

(*E-mail: tys73@163.com*)

GE Weigao

(*Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081*, China*)

Abstract In this paper, we consider the multiplicity of positive solution for boundary value problem of fractional differential equations with p-Laplacian operator. By using the fixed-point theorem on a convex cone, the existence and the multiplicity results of positive solution are obtained.

Key words fractional differential equation; p-Laplacian; boundary value problem; positive solution

MR(2000) Subject Classification 34B15; 34B18

Chinese Library Classification O175.8