第 41 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 41 No. 4
2018 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2018

树的第二大特征值的界 *

张国珍

(山西大学数学科学学院，太原 030006)

(E-mail: guozhen@sxu.edu.cn)

摘　要　在文献 Ji-Ming Guo, Shang-Wang Tan. A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Linear Algebra and its Applications*, 2002, 347(1–3): 9–15 和 Ji-Ming Guo, Shang-Wang Tan. A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Linear Algebra and Its Applications*, 2004, 380: 125–134 中，Guo 和 Tan 给出了有 $2k$ 个顶点且有完美匹配的树的第二大特征值的上界，这个上界与顶点数有关，并且刻画了第二大特征值达到该上界的树. 本文给出了有 $2k$ 个顶点的树的第二大特征值的上界，这个上界与顶点数和最大匹配的基数有关，并且刻画了第二大特征值达到该上界的树.

关键词　树；匹配；特征值；上界

MR(2000) 主题分类　05C05; 05C50

中图分类　O157.5

1　引言

本文仅考虑没有重边和环的有限图. 设 G 是一个顶点集为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图. G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})$ 定义为 $n \times n$ 矩阵 (a_{ij}), 此处 $a_{ij} = 1$ 当 v_i 与 v_j 相邻，否则 $a_{ij} = 0$. G 的特征多项式定义为 $\det(xI - A(G))$, 记为 $\Phi(G)$. 由于 $A(G)$ 是实对称矩阵，所以它的所有特征值都是实数. 不失一般性，假设这些特征值按照非增顺序排列为

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$$

并且称之为 G 的特征值. 若 G 是偶图，则 $\lambda_i(G) = -\lambda_{n-i+1}(G)$, $i = 1, 2, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor$. 偶图的特征值在量子化学理论中有物理解释，因此研究 G 的图论性质与其特征值的关系很有意义.

G 的一个匹配是一个两两不相邻的边的集合. G 的一个 m- 匹配是一个基数为 m

本文 2015 年 1 月 20 日收到. 2018 年 1 月 23 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11401352, 11401354, 11501341) 资助项目.

的匹配. 若匹配 M 的某条边与顶点 v 关联, 则称 M 饱和 v, 或称 v 是 M- 饱和的. 若 G 的每一个顶点都是 M- 饱和的, 则称 M 是完美匹配. 若 G 没有匹配 M' 满足 $|M'| > |M|$, 则称 M 是最大匹配.

特别地，当偶图是树 T 的时候，最大特征值 $\lambda_1(T)$ 和第二大特征值 $\lambda_2(T)$ 已经得到了广泛研究 [1−9]. 在 [1] 中，对于有 $2k$ 个顶点且有完美匹配的树 T, Chang 给出了下面的定理.

定理 1.1[1] 设 T 是一棵有 $2k$ 个顶点且有完美匹配的树，则

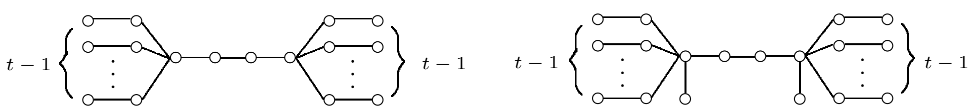
$$\lambda_2(T) \le \begin{cases} (\sqrt{t-1}+\sqrt{t+3})/2, & \text{当 } k=2t, \\ (\sqrt{t}+\sqrt{t+4})/2, & \text{当 } k=2t+1, \end{cases}$$

此处 $t=1,2,3,\cdots$.

在 [1] 中， Chang 提出了下面的猜想：设 k 是一个正整数， T 是一棵有 $2k$ 个顶点且有完美匹配的树，则

$$\lambda_2(T) \le \begin{cases} r_1(t), & \text{当 } k=2t, \\ r_2(t), & \text{当 } k=2t+1, \end{cases}$$

此处 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 分别是方程 $x^3-(t+1)x+1=0$ 和 $x^4-(t+2)x^2+x+1=0$ 的最大正根， $t=1,2,3,\cdots$. 第一个不等式中的等号成立当且仅当 $T \cong T^1$, 第二个不等式中的等号成立当且仅当 $T \cong T^2$, 其中 T^1 和 T^2 是图 1 所示的树.



T^1 T^2

图 1

在 [2] 中， Guo 和 Tan 证明了上述猜想对于 $k=2t+1$ 成立，但对于 $k=2t$ 不成立. 他们给出了下面的定理.

定理 1.2[2] 设 T 是一棵有 $2k=2(2t+1)$ 个顶点且有完美匹配的树, 则 $\lambda_2(T) \le r_2(t)$, 此处 $r_2(t)$ 是方程

$$x^4-(t+2)x^2+x+1=0$$

的最大正根，等号成立当且仅当 $T \cong T^2$, 其中 T^2 是图 1 所示的树.

进而，在 [3] 中， Guo 和 Tan 证明了下面的结果.

定理 1.3[3] 设 T 是一棵有 $2k=4t\ (t\ge 2)$ 个顶点且有完美匹配的树, 则 $\lambda_2(T) \le r(t)$, 此处 $r(t)$ 是方程

$$(x^4-(t+1)x^2+1)(x^2+x-1)+x=0$$

的最大正根，等号成立当且仅当 $T \cong T^3$, 其中 T^3 是图 2 所示的树.

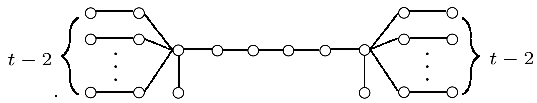


图 2 T^3.

定理 1.2 和 1.3 给出了有 $2k$ 个顶点且有完美匹配的树 T 的第二大特征值 $\lambda_2(T)$ 的上界，这个上界与顶点数有关，并且刻画了第二大特征值达到该上界的树．然而，当一棵树 T 有 $2k$ 个顶点但没有完美匹配时，对于 $\lambda_2(T)$ 的上界还没有相应的结果．本文给出了 $\lambda_2(T)$ 的与顶点数和最大匹配的基数有关的上界，并且刻画了第二大特征值达到该上界的树． 1 度顶点称为悬挂点．为了陈述本文的主要结果，我们需要下面的引理．

引理 1.4[4] 设 T 是一棵有 n 个顶点且有一个 m- 匹配的树，其中 $n>2m$, 则存在一个 m- 匹配 M 和一个悬挂点 v, 使得 M 不饱和 v.

由引理 1.4, 对于一棵有 n 个顶点且有一个基数为 m 的最大匹配的树 T, 其中 $n>2m$, 我们可以定义一个集合 $\mathcal{P}(T)=\{u: u\text{是}T\text{的悬挂点且}T-u\text{有一个基数为}m\text{的最大匹配}\}$.

对于满足 $k\geq m$ 的正整数 k 和 m, 记 $\Omega_{2k}^m=\{T: T$ 是一棵有 $2k$ 个顶点且有一个基数为 m 的最 大匹配的树$\}$. 设 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^m\in\Omega_{2(k+1)}^m$, 满足对于任意的树 $T\in\Omega_{2(k+1)}^m$, $\lambda_2(T)\leq\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^m)$. 因为 $2(k+1)>2m$, 由引理 1.4, 存在 $u\in\mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^m)$, 使得 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^m-u\in\Omega_{2k+1}^m$. 因为 $2k+1>2m$, 由引理 1.4, 存在 $v\in\mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^m-u)$, 使得 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^m-u-v\in\Omega_{2k}^m$. 显然， u 和 v 在 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^m$ 中不相邻，因此 $u,v\in\mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^m)$. 本文的主要结果如下.

定理 1.5 设 T 是 Ω_{2k}^m 中的一棵树. 若存在 $u,v\in\mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^m)$ 使得 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^m-u-v\cong\widetilde{T}_{2k}^m$, 则

$$\lambda_2(T)\leq\begin{cases} s_1(k,t), & \text{当 } m=2t+1,\ t\geq 3,\\ s_2(k,t), & \text{当 } m=2t,\ t\geq 3,\end{cases}$$

此处 $s_1(k,t)$ 和 $s_2(k,t)$ 分别是方程 $x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t=0$ 和 $[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x=0$ 的最大正根．第一个不等式中的等号成立当且仅当 $T\cong T_{2k}^{2t+1}$, 第二个不等式中的等号成立当且仅当 $T\cong S_{2k}^{2t}$, 其中 T_{2k}^{2t+1} 和 S_{2k}^{2t} 是图 3 所示的树.

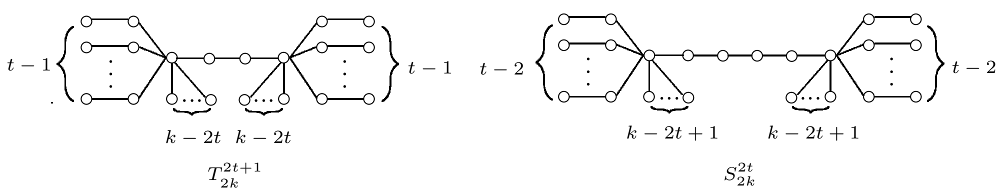


图 3

记 S_n, K_n 和 P_n 分别为 n 个顶点的星，完全图和路，且记 rK_s 为不相交的 r 个 K_s 的并．用 $G\cup H$ 表示分支为 G 和 H 的图．称一条边 uv 是悬挂边，若 u 或 v 是一个悬挂点．文中未定义的其他图论术语参见 [10].

2 一些引理

在给出定理 1.5 的证明之前，我们先给出一些引理．下面的结果经常被用来计算树的特征多项式．

引理 2.1[5] 设 T 是一棵树且 $e=uv$ 是 T 的一条边，则

$$\Phi(T)=\Phi(T-e)-\Phi(T-u-v).$$

下面著名的 Cauchy 交错定理在定理 1.5 的证明中起到了重要作用．

引理 2.2[5] 设 G 是一个有 n 个顶点的图，且 V' 是 G 的一个 k- 顶点子集 (即有 k 个顶点的子集)．设 $G-V'$ 是在 G 中删去 V' 的点及其关联的边所得到的图，则

$$\lambda_i(G)\geq\lambda_i(G-V')\geq\lambda_{i+k}(G),\qquad i=1,2,\cdots,n-k.$$

引理 2.3[6] 设 G 是一个连通图且 G' 是 G 的一个真子图，则 $\lambda_1(G')<\lambda_1(G)$.

对于任意有 n $(n\geq 3)$ 个顶点的树 T, 易见 K_2 是 T 的一个真子图．注意到 $\lambda_1(K_2)=1$, 由引理 2.3, 得到：

引理 2.4 对于任意有 n $(n\geq 3)$ 个顶点的树 T, $\lambda_1(T)>1$.

因为图的特征多项式只有实根，故本文我们仅考虑实根多项式．设 $f(x)$ 是关于变量 x 的一个多项式，记 $\partial(f)$ 为 $f(x)$ 的次数，记 $\lambda_1(f)$ 为方程 $f(x)=0$ 的最大根．本节的许多讨论依赖于比较两个多项式的最大根，下面的结果提供了一个有效的比较方法．

引理 2.5[7] 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个实根首一多项式，且 $\partial(f)=\partial(g)$. 若 $f(x)=g(x)+r(x)$ 且 $\partial(r)\leq\partial(g)$, 则当 $r(\lambda_1(g))<0$ 时， $\lambda_1(g)<\lambda_1(f)$.

设 k 和 t 是正整数且 $k\geq 2t$. 我们按如下方式定义一棵有 k 个顶点的树 A_k^t: 通过给星 S_{k-t+1} 的某 $t-1$ 个非中心点都加一条悬挂边，得到的图记为 A_k^t, 则 A_k^t 有一个 t-匹配，且 A_k^t 的中心点就是 S_{k-t+1} 的中心点．对于 $k>2t$, 设 B_k^t 是通过给 A_{k-1}^t 的一个 2 度顶点加一条悬挂边得到的图，则 B_k^t 有一个 t- 匹配，且 B_k^t 的中心点就是 A_{k-1}^t 的中心点．对于 $k>2t$, 设 C_k^t 是通过给 A_{k-1}^t 的一个与中心点不相邻的悬挂点加一条悬挂边得到的图，则 C_k^t 有一个 t- 匹配，且 C_k^t 的中心点就是 A_{k-1}^t 的中心点．图 4 显示了 A_k^t, B_k^t 和 C_k^t.

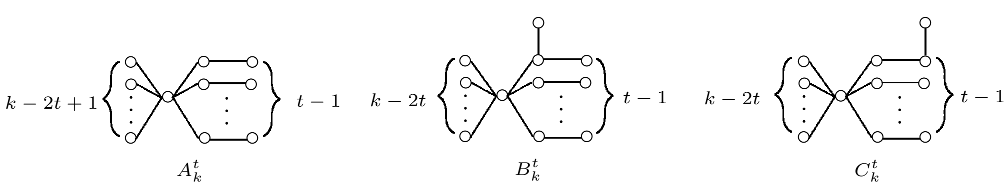


图 4

引理 2.6[4] 设 T 是一棵有 k 个顶点且有一个 t- 匹配的树，满足 $k\geq 2t$ 且 $T\ncong A_k^t$,

则

$$\lambda_1(T) < \lambda_1(A_k^t).$$

引理 2.7[4] 设 T 是一棵有 k 个顶点且有一个 t- 匹配的树，满足 $k > 2t$, $T \ncong A_k^t$ 且 $\ncong B_k^t$, 则

$$\lambda_1(T) < \lambda_1(B_k^t).$$

引理 2.8 设 $\widehat{T}$ 是一棵有 $2t+1$ $(t \geq 2)$ 个顶点且有一个 t- 匹配的树 (如图 5 所示), 则 $\lambda_1(\widehat{T}) \leq \lambda_1(A_{2t}^{t-1})$.

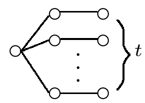


图 5 $\widehat{T}$.

证 由引理 2.1, 可以得到 $\widehat{T}$ 和 A_{2t}^{t-1} 的特征多项式,

$$\Phi(\widehat{T}) = x(x^2-1)^{t-1}(x^2-t-1),$$
$$\Phi(A_{2t}^{t-1}) = x^2(x^2-1)^{t-3}[x^4-(t+2)x^2+3].$$

由引理 2.4, $\lambda_1(\widehat{T}) = \sqrt{t+1}$. 设 $f(x) = x^4-(t+2)x^2+3$, 由引理 2.4, $\lambda_1(A_{2t}^{t-1}) = \lambda_1(f)$. 因为 $t \geq 2$, 故 $f(\sqrt{t+1}) = -t+2 \leq 0$, 从而 $\lambda_1(f) \geq \sqrt{t+1}$, 即 $\lambda_1(A_{2t}^{t-1}) \geq \lambda_1(\widehat{T})$. 证毕.

设 k 和 t 是正整数，对于 $k \geq 2t+1$, 设 T_{2k}^{2t+1} 是通过将两个 A_k^t 中的两个与中心点相邻的悬挂点用一条边连接起来得到的图 (如图 3 所示), 则 T_{2k}^{2t+1} 有一个基数为 $2t+1$ 的最大匹配. 当 $k = 2t+1$ 时， $T_{2k}^{2t+1} \cong T^2$(如图 1 所示). 对于 $k \geq 2t$, 设 S_{2k}^{2t} 是通过将两个 A_k^t 中的两个不与中心点相邻的悬挂点用一条边连接起来得到的图 (如图 3 所示), 则 S_{2k}^{2t} 有一个基数为 $2t$ 的最大匹配. 当 $k = 2t$ 时， $S_{2k}^{2t} \cong T^3$ (如图 2 所示).

下面我们来计算图 T_{2k}^{2t+1} 和 S_{2k}^{2t} 的第二大特征值.

引理 2.9 设 k 和 t 是正整数，则 $\lambda_2(T_{2k}^{2t+1}) = \lambda_1(x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t)$ 当 $k \geq 2t+1$, 且 $\lambda_2(S_{2k}^{2t}) = \lambda_1([x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x)$ 当 $k \geq 2t$ 且 $t \geq 3$.

证 由引理 2.1, 可以得到 T_{2k}^{2t+1} 的特征多项式,

$$\begin{aligned}\Phi(T_{2k}^{2t+1}) =& x^{2k-4t-2}(x^2-1)^{2t-3}[x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t]\\ &\cdot [x^4-(k-t+1)x^2-x+k-2t].\end{aligned}$$

设 $f(x) = x^4-(k-t+1)x^2-x+k-2t$, $g(x) = x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t$. 注意到 $f(x) = g(x)-2x$, 设 $r(x) = -2x$. 因为 $g(1) = -t+1 \leq 0$, 故 $\lambda_1(g) \geq 1$, 从而 $r(\lambda_1(g)) = -2\lambda_1(g) < 0$. 由引理 2.5, $\lambda_1(g) < \lambda_1(f)$. 下面我们证明 $\lambda_2(f) < \lambda_1(g)$. 易见方程 $f(x) = 0$ 有 2 个正根和 2 个负根，记 $\lambda_2(f)$ 是其第二大正根. 注意到 $f(0) = k-2t > 0$ 且 $f(1) = -t-1 < 0$, 我们有 $0 < \lambda_2(f) < 1 \leq \lambda_1(g) < \lambda_1(f)$, 因此 $\lambda_2(T_{2k}^{2t+1}) = \lambda_1(g) = \lambda_1(x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t)$.

下面我们证明第二个等式.

由引理 2.1, 可以得到 S_{2k}^{2t} 的特征多项式,

$$\begin{aligned}\Phi(S_{2k}^{2t}) =& x^{2k-4t}(x^2-1)^{2t-6}\{(x^2-1)^2[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1]^2\\ &-x^2[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+2]^2\}\\ =& x^{2k-4t}(x^2-1)^{2t-6}\{[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x\}\\ &\cdot\{[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2-x-1)-x\}.\end{aligned}$$

设 $g_1(x)=[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x$, $g_2(x)=[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2-x-1)-x$. 显然, 方程 $g_1(x)g_2(x)=(x^2-1)^2[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1]^2-x^2[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+2]^2=0$ 有 6 个正根和 6 个负根. 设 $\sigma_1=\frac{k-2t+1}{k-t+1}$, $\sigma_2=\frac{k-t+1+\sqrt{(k-t+1)^2-6(k-2t+1)}}{2}$, $\sigma_3=\frac{k-t+1+\sqrt{(k-t+1)^2-4(k-2t+1)}}{2}$. 注意到 $t\geq 3$, 容易验证 $0<\sigma_1<1<\sigma_2<\sigma_3<k-t+1$ 且有

$$\begin{aligned}&g_1(\sqrt{\sigma_3})=\sqrt{\sigma_3}>0,\\ &g_1(\sqrt{\sigma_2})=-\frac{1}{2}(k-2t+1)(\sigma_2+\sqrt{\sigma_2}-1)+\sqrt{\sigma_2}<0,\\ &g_1(\sqrt{\sigma_1})=\sigma_1^2(\sigma_1+\sqrt{\sigma_1}-1)+\sqrt{\sigma_1}>0,\\ &g_1(0)=-(k-2t+1)<0,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&g_2(k-t+1)=[(k-t)(k-t+1)^3+k-2t+1][(k-t)^2+(k-t)-1]-(k-t)-1>0,\\ &g_2(\sqrt{\sigma_3})=-\sqrt{\sigma_3}<0,\\ &g_2(1)=t-2>0,\\ &g_2(0)=-(k-2t+1)<0.\end{aligned}$$

回忆到方程 $g_1(x)g_2(x)=0$ 有 6 个正根和 6 个负根, 因此方程 $g_1(x)=0$ 有 3 个正根和 3 个负根且 $\sqrt{\sigma_2}<\lambda_1(g_1)<\sqrt{\sigma_3}$. 类似地, 方程 $g_2(x)=0$ 也有 3 个正根和 3 个负根且 $\sqrt{\sigma_3}<\lambda_1(g_2)<k-t+1$. 因此 $\sqrt{\sigma_2}<\lambda_1(g_1)<\sqrt{\sigma_3}<\lambda_1(g_2)$. 记 $\lambda_2(g_2)$ 为方程 $g_2(x)=0$ 的第二大正根. 结合 $g_2(k-t+1)>0$, $g_2(1)>0$, $g_2(0)<0$ 和 $g_2(\sqrt{\sigma_2})=-\frac{1}{2}(k-2t+1)(\sigma_2-\sqrt{\sigma_2}-1)-\sqrt{\sigma_2}<0$, 我们有 $1<\lambda_2(g_2)<\sqrt{\sigma_2}<\lambda_1(g_1)<\sqrt{\sigma_3}<\lambda_1(g_2)$. 因此 $\lambda_2(S_{2k}^{2t})=\lambda_1(g_1)=\lambda_1([x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x)$. 引理 2.9 的证明完成. 证毕.

下面四个引理在定理 1.5 的证明中起到了很重要的作用.

引理 2.10 设 k 和 t $(t\geq 2)$ 是正整数且 $k\geq 2t$, 则 $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$ 且 $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(T_{2k}^{2(t-1)+1})$.

证 由引理 2.1, 可以得到 A_k^t 的特征多项式,

$$\Phi(A_k^t)=x^{k-2t}(x^2-1)^{t-2}[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1]. \tag{2.1}$$

设 $g(x)=x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1$, 由引理 2.4, $\lambda_1(A_k^t)=\lambda_1(g)>1$. 设 $f(x)=x^4-(k-t+2)x^2+x+k-2t+1$, 由引理 2.9, $\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})=\lambda_1(f)$. 注意到 $f(x)=g(x)-x^2+x$, 设 $r(x)=-x^2+x$, 则 $r(x)$ 是 $(1/2,+\infty)$ 上的减函数. 因此 $r(\lambda_1(g))<r(1)=0$, 由引理 2.5, $\lambda_1(g)<\lambda_1(f)$, 即 $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$. 类似地可以证明另一个不等式. 证毕.

引理 2.11 设 k 和 t $(t\geq 3)$ 是正整数且 $k\geq 2t$, 则 $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})$ 且 $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(S_{2k}^{2(t-1)})$.

证 由 (2.1) 和引理 2.4,

$$\begin{aligned}\lambda_1(A_k^t)=&\lambda_1(x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1)\\=&\sqrt{\frac{k-t+1+\sqrt{(k-t+1)^2-4(k-2t+1)}}{2}}=\sqrt{\sigma_3}.\end{aligned}$$

设 $f(x)=[x^4-(k-t+2)x^2+k-2t+2](x^2+x-1)+x$, 由引理 2.9, $\lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})=\lambda_1(f)$. 注意到

$$f(\sqrt{\sigma_3})=(-\sigma_3+1)(\sigma_3+\sqrt{\sigma_3}-1)+\sqrt{\sigma_3}=-(\sigma_3-2)(\sigma_3+\sqrt{\sigma_3})-1.$$

当 $t\geq 3$ 时 $\sigma_3\geq 2$, 故 $f(\sqrt{\sigma_3})<0$, 从而 $\lambda_1(f)>\sqrt{\sigma_3}$, 即 $\lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})>\lambda_1(A_k^t)$. 类似地可以证明另一个不等式. 证毕.

引理 2.12 设 k 和 t $(t\geq 3)$ 是正整数且 $k\geq 2t+1$, 则 $\lambda_1(C_k^t)<\lambda_1(B_k^t)<\lambda_2(T_{2k}^{2t+1})$.

证 由引理 2.7, $\lambda_1(C_k^t)<\lambda_1(B_k^t)$. 下面我们证明 $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_2(T_{2k}^{2t+1})$.

由引理 2.1, 可以得到 B_k^t 的特征多项式,

$$\Phi(B_k^t)=x^{k-2t}(x^2-1)^{t-3}[x^6-(k-t+2)x^4+(3k-4t-1)x^2-2(k-2t)]. \tag{2.2}$$

设 $g(x)=x^6-(k-t+2)x^4+(3k-4t-1)x^2-2(k-2t)$, 由引理 2.4, $\lambda_1(B_k^t)=\lambda_1(g)>1$. 设 $h(x)=x^4-(k-t+1)x^2+x+k-2t$, 由引理 2.9, $\lambda_2(T_{2k}^{2t+1})=\lambda_1(h)$. 因为 $t\geq 3$, 故 $h(1)=-t+1<0$, 从而 $\lambda_1(h)>1$. 设 $f(x)=(x^2-1)h(x)=x^6-(k-t+2)x^4+x^3+(2k-3t+1)x^2-x-(k-2t)$, 则 $\lambda_2(T_{2k}^{2t+1})=\lambda_1(h)=\lambda_1(f)$. 注意到 $f(x)=g(x)+x^3-(k-t-2)x^2-x+k-2t$, 设 $r(x)=x^3-(k-t-2)x^2-x+k-2t$. 下面我们证明 $r(\lambda_1(g))<0$. 注意到

$$\begin{aligned}g(x)=&\{x^3+(k-t-2)x^2+[(k-t)^2-5(k-t)+3]x+t-2\\&+(k-t-2)[(k-t)^2-5(k-t)+3]\}r(x)\\&+\{(k-t-2)^2-(k-t+1)+(3k-4t-1)-(k-t-2)(k-2t)\\&+(k-t-2)[t-2+(k-t-2)((k-t-2)^2-(k-t+1))]\}x^2\\&+\{t-2+(k-t-2)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\\&-(k-2t)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\}x-(k-2t)\{t-2\\&+(k-t-2)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\}-2(k-2t).\end{aligned}$$

记上述等式为 $g(x)=q(x)r(x)+r_1(x)$, 则当 $q(\lambda_1(g))\neq 0$ 时, $r(\lambda_1(g))=-\frac{r_1(\lambda_1(g))}{q(\lambda_1(g))}$. 我们给出下面两个断言.

断言 1 $q(\lambda_1(g))>0$.

注意到 $q(x)=x^3+(k-t-2)x^2+[(k-t)^2-5(k-t)+3]x+t-2+(k-t-2)[(k-t)^2-5(k-t)+3]$, 则 $q'(x)=3x^2+2(k-t-2)x+(k-t)^2-5(k-t)+3$. 因为 $k\geq 2t+1$ 且 $t\geq 3$, 故 $k-t-2\geq t-1>0$. 下面我们证明当 $t\geq 3$ 且 $x\geq 1$ 时, $q'(x)>0$. 注意到当 $t\geq 3$ 时 $k\geq 2t+1\geq 7$, 我们考虑下面两种情况. 若 $t\geq 4$ 或 $t=3$ 且 $k\geq 8$, 则 $k-t\geq 5>\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ 从而 $(k-t)^2-5(k-t)+3>0$, 这意味着当 $x\geq 1$ 时 $q'(x)>0$. 若 $t=3$ 且 $k=7$, 则 $q'(x)=3x^2+4x-1$, 从而当 $x\geq 1$ 时 $q'(x)>0$. 因此 $q(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的增函数. 类似地，当 $t\geq 3$ 时 $q(1)>0$. 因此 $q(\lambda_1(g))>q(1)>0$. 断言 1 成立.

断言 2 $r_1(\lambda_1(g))>0$.

回忆到

$$\begin{aligned}r_1(x)=&\{(k-t-2)^2-(k-t+1)+(3k-4t-1)-(k-t-2)(k-2t)\\&+(k-t-2)[t-2+(k-t-2)((k-t-2)^2-(k-t+1))]\}x^2\\&+\{t-2+(k-t-2)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\\&-(k-2t)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\}x-(k-2t)\{t-2\\&+(k-t-2)[(k-t-2)^2-(k-t+1)]\}-2(k-2t).\end{aligned}$$

记上述等式为 $r_1(x)=ax^2+bx+c$, 则 $r_1'(x)=2ax+b$. 通过化简， $a=(k-t-2)^2[(k-t)^2-5(k-t)]+[(k-t)^2-5(k-t)+3]+3k-4t-1+(2k-8)(k-t-2)$. 若 $t\geq 4$, 或 $t=3$ 且 $k\geq 8$, 则 $a>0$. 若 $t=3$ 且 $k=7$, 则 $a=3>0$. 因此当 $t\geq 3$ 时 $a>0$. 通过化简， $b=[(k-t)^2-5(k-t)+4](t-2)$. 易见当 $t\geq 3$ 时 $b\geq 0$. 因此 $r_1'(x)>0$, $r_1(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数. 进而，通过化简，我们有

$$\begin{aligned}r_1(1)=&a+c+b\\=&(t-2)\{t-2+(k-t-2)[(k-t)^2-5(k-t)+3]\}+(k-t)(t-5)+3k-4t+2+b.\end{aligned}$$

若 $t\geq 4$, 或 $t=3$ 且 $k\geq 8$, 则 $(t-2)\{t-2+(k-t-2)[(k-t)^2-5(k-t)+3]\}>0$ 且 $(k-t)(t-5)+3k-4t+2=(k-t)(t-3)+k-2t+2>0$, 这意味着 $a+c>0$. 若 $t=3$ 且 $k=7$, 则 $a+c=2>0$. 因此当 $t\geq 3$ 时 $r_1(1)>0$, 从而 $r_1(\lambda_1(g))>r_1(1)>0$. 断言 2 成立.

回忆到 $r(\lambda_1(g))=-\frac{r_1(\lambda_1(g))}{q(\lambda_1(g))}$, 由断言 1 和 2, $r(\lambda_1(g))<0$. 注意到 $f(x)=g(x)+r(x)$, 由引理 2.5, $\lambda_1(g)<\lambda_1(f)$, 即 $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_2(T_{2k}^{2t+1})$. 证毕.

引理 2.13 设 k 和 t $(t\geq 3)$ 是正整数且 $k\geq 2t+1$, 则 $\lambda_1(C_k^t)<\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(A_{k-1}^{t-1})<\lambda_2(S_{2k}^{2t})$.

证 由引理 2.7, $\lambda_1(C_k^t)<\lambda_1(B_k^t)$. 下面我们证明 $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(A_{k-1}^{t-1})<\lambda_2(S_{2k}^{2t})$.

首先证明 $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(A_{k-1}^{t-1})$.

设 $g(x)=x^6-(k-t+2)x^4+(3k-4t-1)x^2-2(k-2t)$, 由 (2.2) 及引理 2.4, $\lambda_1(B_k^t)=\lambda_1(g)>1$. 设 $p(x)=x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+2$, 由 (2.1) 及引理 2.4, $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1})=\lambda_1(p)>1$. 设 $f(x)=(x^2-1)p(x)=x^6-(k-t+2)x^4+(2k-3t+3)x^2-(k-2t+2)$,

则 $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1}) = \lambda_1(p) = \lambda_1(f)$. 注意到 $f(x) = g(x) - (k-t-4)x^2 + k - 2t - 2$, 设 $r(x) = -(k-t-4)x^2 + k - 2t - 2$. 若 $k = 2t+1$, 则 $r(x) < 0$ 从而 $r(\lambda_1(g)) < 0$. 若 $k \geq 2t+2$, 则 $r(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数. 因此当 $t \geq 3$ 时 $r(\lambda_1(g)) < r(1) = -t + 2 < 0$. 由引理 2.5, $\lambda_1(g) < \lambda_1(f)$, 即 $\lambda_1(B_k^t) < \lambda_1(A_{k-1}^{t-1})$.

其次证明 $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1}) < \lambda_2(S_{2k}^{2t})$.

设 $h(x) = [x^4 - (k-t+1)x^2 + k - 2t + 1](x^2 + x - 1) + x$, 由引理 2.9, $\lambda_2(S_{2k}^{2t}) = \lambda_1(h)$. 由上述的讨论, $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1}) = \lambda_1(p) = \lambda_1(x^4 - (k-t+1)x^2 + k - 2t + 2) = \sqrt{\frac{k-t+1+\sqrt{(k-t+1)^2-4(k-2t+2)}}{2}}$. 设 $\sigma_4 = \frac{k-t+1+\sqrt{(k-t+1)^2-4(k-2t+2)}}{2}$, 则 $\sigma_4 > 1$. 因为 $h(\sqrt{\sigma_4}) = -(\sigma_4 + \sqrt{\sigma_4} - 1) + \sqrt{\sigma_4} = -\sigma_4 + 1 < 0$, 故 $\lambda_1(h) > \sqrt{\sigma_4}$, 即 $\lambda_2(S_{2k}^{2t}) > \lambda_1(A_{k-1}^{t-1})$. 证毕.

3 定理 1.5 的证明

这一节中，我们给出定理 1.5 的证明. 我们把定理 1.5 分成定理 3.1 和 3.2, 然后分别证明这两个定理.

定理 3.1 设 T 是 Ω_{2k}^{2t+1} 中的一棵树, 满足 $k \geq 2t+1$ 且 $t \geq 3$. 若存在 $u, v \in \mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1})$ 使得 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v \cong \widetilde{T}_{2k}^{2t+1}$, 则

$$\lambda_2(T) \leq s_1(k,t),$$

此处 $s_1(k,t)$ 是方程 $x^4 - (k-t+1)x^2 + x + k - 2t = 0$ 的最大正根，等号成立当且仅当 $T \cong T_{2k}^{2t+1}$.

证 我们对 k 用数学归纳法证明这个定理. 当 $k = 2t+1$ 时，一个基数为 $2t+1$ 的最大匹配就是一个完美匹配，且 $s_1(k,t)$ 是方程 $x^4 - (t+2)x^2 + x + 1 = 0$ 的最大正根，由定理 1.2, 这种情况下定理成立. 假设定理对于 k ($k \geq 2t+1$) 成立，下证定理对于 $k+1$ 也成立. 由引理 2.9, $\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$ 是方程 $x^4 - (k-t+2)x^2 + x + k - 2t + 1 = 0$ 的最大正根，故 $s_1(k+1,t) = \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$. 只需证明 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{2(k+1)}^{2t+1}$ 就足够了. 注意到存在 $u, v \in \mathcal{P}(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1})$ 使得 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v \cong \widetilde{T}_{2k}^{2t+1}$, 结合 $\widetilde{T}_{2k}^{2t+1}$ 的定义，我们有 $\lambda_2(T_{2k}^{2t+1}) \leq \lambda_2(\widetilde{T}_{2k}^{2t+1}) = \lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v)$. 又根据归纳假设， $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v) \leq s_1(k,t) = \lambda_2(T_{2k}^{2t+1})$. 因此 $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v) = s_1(k,t)$, 由归纳假设， $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u - v \cong T_{2k}^{2t+1}$, 从而 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{2k}^{2t+1} + v + u$. 余下部分我们来证明 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{2(k+1)}^{2t+1}$. 因为 u 和 v 都是 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的悬挂点，故 u 和 v 在 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 中不相邻. 设 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 是如图 6 所示的 T_{2k}^{2t+1} 的 5 个点，我们考虑下列 5 种可能的情况.

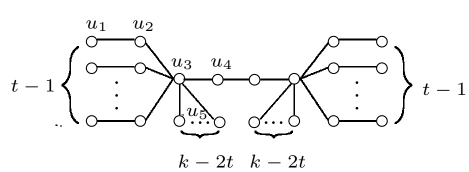


图 6 T_{2k}^{2t+1}.

情况 1 u 和 u_1 相邻.

在这种情况下, $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 可能同构于如图 7 所示的 12 个图.

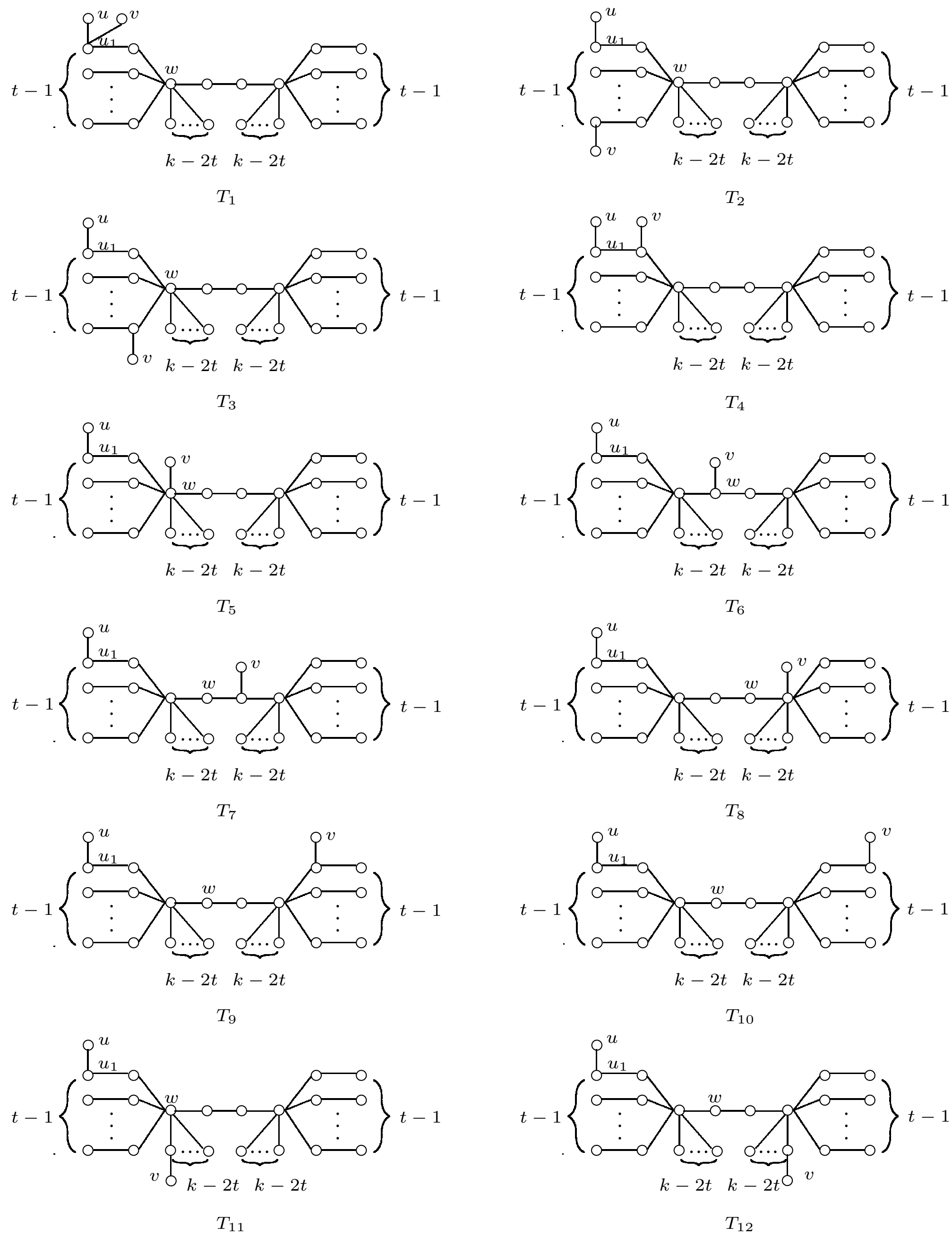


图 7

情况 1.1 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_1, T_2$ 或 T_3.

若 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_1$, 则 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong (k-2t)K_1 \cup (t-2)K_2 \cup S_4 \cup A_{k+1}^{t+1}$. 注意到 K_1, K_2 和 S_4 都是 A_{k+1}^{t+1} 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \max\{\lambda_1(K_1), \lambda_1(K_2), \lambda_1(S_4), \lambda_1(A_{k+1}^{t+1})\} =$

$\lambda_1(A_{k+1}^{t+1})$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(A_{k+1}^{t+1}) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 与 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的定义矛盾，故这种情况是不可能出现的.

若 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_2$ 或 T_3, 类似地，我们也能得到矛盾.

情况 1.2 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_4$.

易见 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 有一个基数为 $2t+2$ 的匹配，与 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的最大匹配的基数是 $2t+1$ 矛盾.

情况 1.3 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_5$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong (k-2t+1)K_1 \cup (t-2)K_2 \cup P_3 \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明，我们也能得到矛盾.

情况 1.4 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_6$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong K_1 \cup C_k^t \cup A_k^t$. 由引理 2.6, $\lambda_1(C_k^t) < \lambda_1(A_k^t)$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(A_k^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 1.5 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_7$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong C_k^t \cup A_{k+1}^{t+1}$. 因为 A_k^t 是 A_{k+1}^{t+1} 的真子图，由引理 2.6 和 2.3, $\lambda_1(C_k^t) < \lambda_1(A_k^t) < \lambda_1(A_{k+1}^{t+1})$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(A_{k+1}^{t+1}) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 1.6 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_8$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong A_k^t \cup C_{k+1}^t$. 因为 A_k^t 是 C_{k+1}^t 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(A_k^t) < \lambda_1(C_{k+1}^t)$. 由引理 2.2 和 2.12, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(C_{k+1}^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 1.7 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_9$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong C_k^t \cup B_{k+1}^t$. 因为 B_k^t 是 B_{k+1}^t 的真子图，由引理 2.7 和 2.3, $\lambda_1(C_k^t) < \lambda_1(B_k^t) < \lambda_1(B_{k+1}^t)$. 由引理 2.2 和 2.12, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(B_{k+1}^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 1.8 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{10}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong C_k^t \cup C_{k+1}^t$. 因为 C_t^k 是 C_{k+1}^t 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(C_k^t) < \lambda_1(C_{k+1}^t)$. 由引理 2.2 和 2.12, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(C_{k+1}^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 1.9 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{11}$.

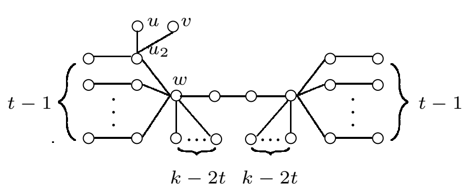
$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong (k-2t-1)K_1 \cup (t-1)K_2 \cup P_3 \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明，我们也能得到矛盾.

情况 1.10 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{12}$.

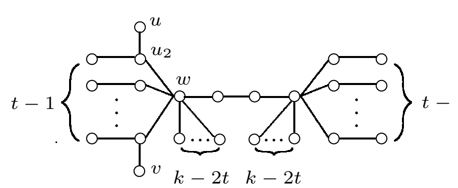
$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong C_k^t \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用与情况 1.5 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 2 u 和 u_2 相邻.

在这种情况下， $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 可能同构于如图 8 所示的 9 个图.



T_{13}



T_{14}

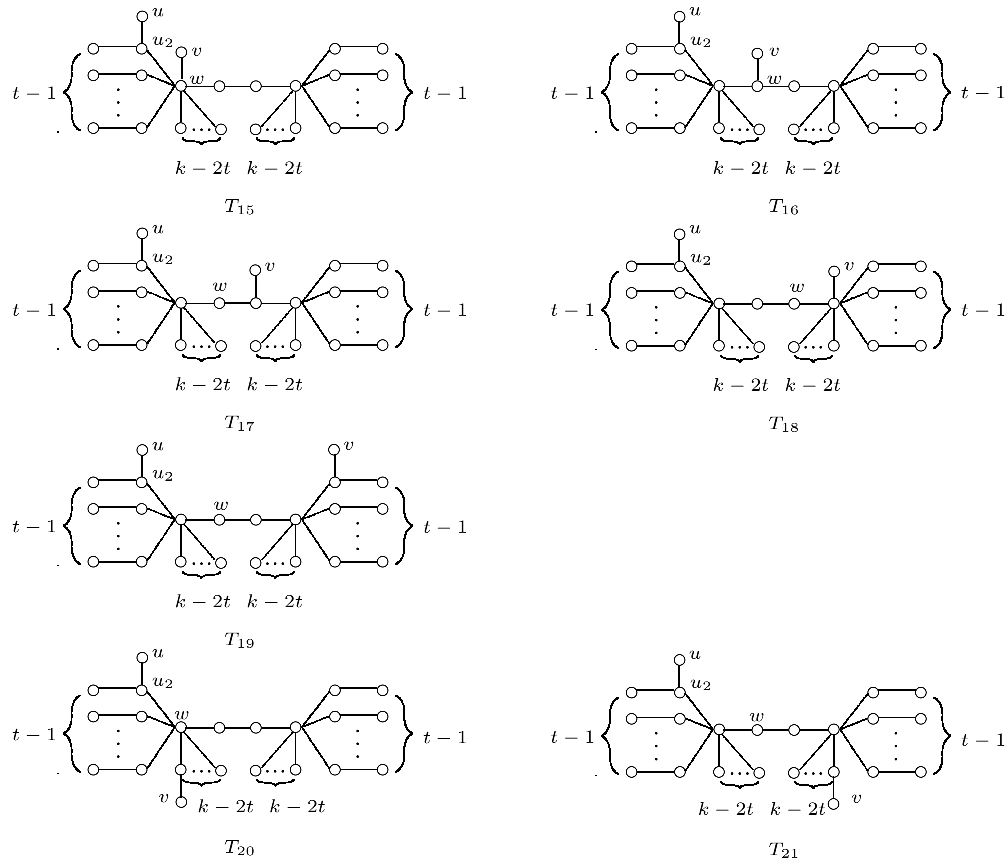


图 8

情况 2.1 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}\cong T_{13}, T_{14}$ 或 T_{15}.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w\cong (k-2t)K_1\cup(t-2)K_2\cup S_4\cup A_{k+1}^{t+1}$, $(k-2t)K_1\cup(t-3)K_2\cup 2P_3\cup A_{k+1}^{t+1}$, 或 $(k-2t+1)K_1\cup(t-2)K_2\cup P_3\cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明, 我们也能得到矛盾.

情况 2.2 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}\cong T_{16}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w\cong K_1\cup B_k^t\cup A_k^t$. 由引理 2.6, $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(A_k^t)$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1})\le\lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w)=\lambda_1(A_k^t)<\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 2.3 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}\cong T_{17}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w\cong B_k^t\cup A_{k+1}^{t+1}$. 因为 A_k^t 是 A_{k+1}^{t+1} 的真子图, 由引理 2.6 和 2.3, $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(A_k^t)<\lambda_1(A_{k+1}^{t+1})$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1})\le\lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w)=\lambda_1(A_{k+1}^{t+1})<\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 2.4 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}\cong T_{18}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w\cong A_k^t\cup B_{k+1}^t$. 因为 A_k^t 是 B_{k+1}^t 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A_k^t)<\lambda_1(B_{k+1}^t)$. 由引理 2.2 和 2.12, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1})\le\lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w)=\lambda_1(B_{k+1}^t)<\lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 2.5 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}\cong T_{19}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}-w\cong B_k^t\cup B_{k+1}^t$. 因为 B_k^t 是 B_{k+1}^t 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(B_k^t)<\lambda_1(B_{k+1}^t)$.

由引理 2.2 和 2.12, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(B_{k+1}^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 2.6 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{20}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong (k-2t-1)K_1 \cup (t-1)K_2 \cup P_3 \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明，我们也能得到矛盾.

情况 2.7 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{21}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong B_k^t \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用与情况 2.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3 u 和 u_3 相邻.

在这种情况下， $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 可能同构于如图 9 所示的 6 个图.

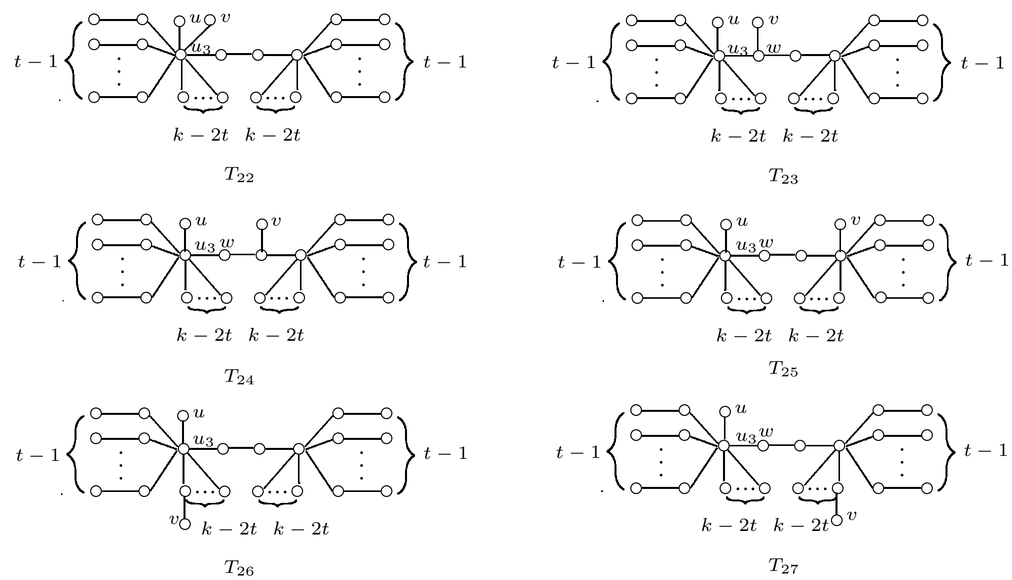


图 9

情况 3.1 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{22}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_3 \cong (k-2t+2)K_1 \cup (t-1)K_2 \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3.2 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{23}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong K_1 \cup A_k^t \cup A_k^t$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(A_k^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 3.3 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{24}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong A_k^t \cup A_{k+1}^{t+1}$. 因为 A_k^t 是 A_{k+1}^{t+1} 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A_k^t) < \lambda_1(A_{k+1}^{t+1})$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w) = \lambda_1(A_{k+1}^{t+1}) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 3.4 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{25}$.

此时， $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{25} \cong T_{2(k+1)}^{2t+1}$, 这正是我们想要证明的结果.

情况 3.5 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{26}$.

易见 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 有一个基数为 $2t+2$ 的匹配，与 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的最大匹配的基数为 $2t+1$ 矛盾.

情况 3.6 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{27}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - w \cong A_k^t \cup A_{k+1}^{t+1}$. 使用与情况 3.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 4 u 和 u_4 相邻.

在这种情况下，$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 可能同构于如图 10 所示的 4 个图.

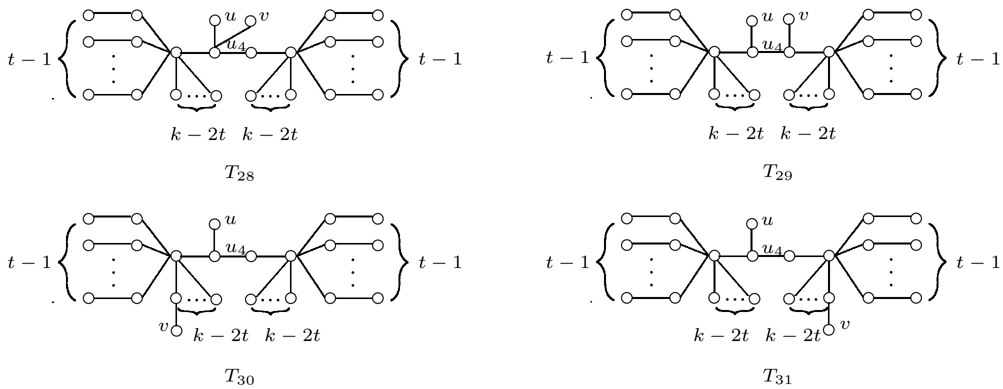


图 10

情况 4.1 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{28}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4 \cong 2K_1 \cup A_{k-1}^t \cup A_k^t$. 因为 A_{k-1}^t 是 A_k^t 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(A_{k-1}^t) < \lambda_1(A_k^t)$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4) = \lambda_1(A_k^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 4.2 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{29}$.

易见 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 有一个基数为 $2t+2$ 的匹配，与 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的最大匹配的基数为 $2t+1$ 矛盾.

情况 4.3 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{30}$.

若 $k = 2t+1$, 则 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4 \cong K_1 \cup A_k^t \cup \widehat{T}$, 此处 $\widehat{T}$ 是如图 5 所示的树. 由引理 2.8, $\lambda_1(\widehat{T}) \le \lambda_1(A_{2t}^{t-1}) = \lambda_1(A_{k-1}^{t-1})$. 因为 A_{k-1}^{t-1} 是 A_k^t 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1}) < \lambda_1(A_k^t)$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4) = \lambda_1(A_k^t) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

若 $k \ge 2t+2$, 则 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4 \cong K_1 \cup A_k^t \cup A_k^{t+1}$. 注意到 K_1, A_k^t, A_k^{t+1} 都是 A_{k+1}^{t+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4) = \max\{\lambda_1(K_1), \lambda_1(A_k^t), \lambda_1(A_k^{t+1})\} < \lambda_1(A_{k+1}^{t+1})$. 由引理 2.2 和 2.10, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} - u_4) < \lambda_1(A_{k+1}^{t+1}) < \lambda_2(T_{2(k+1)}^{2t+1})$, 矛盾.

情况 4.4 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1} \cong T_{31}$.

易见 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 有一个基数为 $2t+2$ 的匹配，与 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 的最大匹配的基数为 $2t+1$ 矛盾.

情况 5 u 和 u_5 相邻.

在这种情况下，$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t+1}$ 可能同构于如图 11 所示的 3 个图.

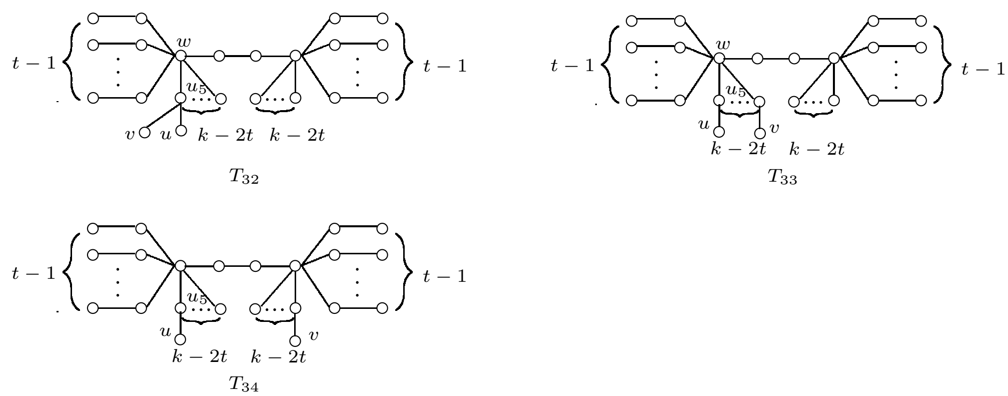


图 11

情况 5.1 $\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)} \cong T_{32}$.

$\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)} - w \cong (k-2t-1)K_1 \cup (t-1)K_2 \cup P_3 \cup A^{t+1}_{k+1}$. 使用类似情况 1.1 的证明，我们也能得到矛盾.

情况 5.2 $\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)} \cong T_{33}$ 或 T_{34}.

易见 $\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+2$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t+1$ 矛盾.

现在，我们得到了 $\widetilde{T}^{2t+1}_{2(k+1)} \cong T_{25} \cong T^{2t+1}_{2(k+1)}$, 因为已经讨论了所有可能的情况，故定理 3.1 的证明完成．证毕.

定理 3.2 设 T 是 Ω^{2t}_{2k} 中的一棵树，满足 $k \geq 2t$ 且 $t \geq 3$. 若存在 $u, v \in \mathcal{P}(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)})$ 使得 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - u - v \cong \widetilde{T}^{2t}_{2k}$, 则

$$\lambda_2(T) \leq s_2(k,t),$$

此处 $s_2(k,t)$ 是方程 $[x^4-(k-t+1)x^2+k-2t+1](x^2+x-1)+x=0$ 的最大正根，等号成立当且仅当 $T \cong S^{2t}_{2k}$.

证 我们对 k 用数学归纳法证明这个定理．当 $k=2t$ 时，一个基数为 $2t$ 的最大匹配就是一个完美匹配，且 $s_2(k,t)$ 是方程 $[x^4-(t+1)x^2+1](x^2+x-1)+x=0$ 的最大正根，由定理 1.3, 这种情况下定理成立．假设定理对于 k $(k \geq 2t)$ 成立，下证定理对于 $k+1$ 也成立．由引理 2.9, $\lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$ 是方程 $[x^4-(k-t+2)x^2+k-2t+2](x^2+x-1)+x=0$ 的最大正根，故 $s_2(k+1,t)=\lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$. 只需证明 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong S^{2t}_{2(k+1)}$ 就足够了．注意到存在 $u, v \in \mathcal{P}(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)})$ 使得 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u-v \cong \widetilde{T}^{2t}_{2k}$, 结合 $\widetilde{T}^{2t}_{2k}$ 的定义，我们有 $\lambda_2(S^{2t}_{2k}) \leq \lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2k}) = \lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u-v)$. 又根据归纳假设，$\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u-v) \leq s_2(k,t) = \lambda_2(S^{2t}_{2k})$. 因此 $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u-v) = s_2(k,t)$, 由归纳假设，$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u-v \cong S^{2t}_{2k}$, 从而 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong S^{2t}_{2k}+v+u$. 余下部分我们来证明 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong S^{2t}_{2(k+1)}$. 因为 u 和 v 都是 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的悬挂点，故 u 和 v 在 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 中不相邻．设 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 是如图 12 所示的 S^{2t}_{2k} 的 6 个点，我们考虑下列 6 种可能的情况.

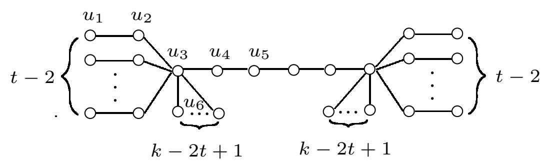
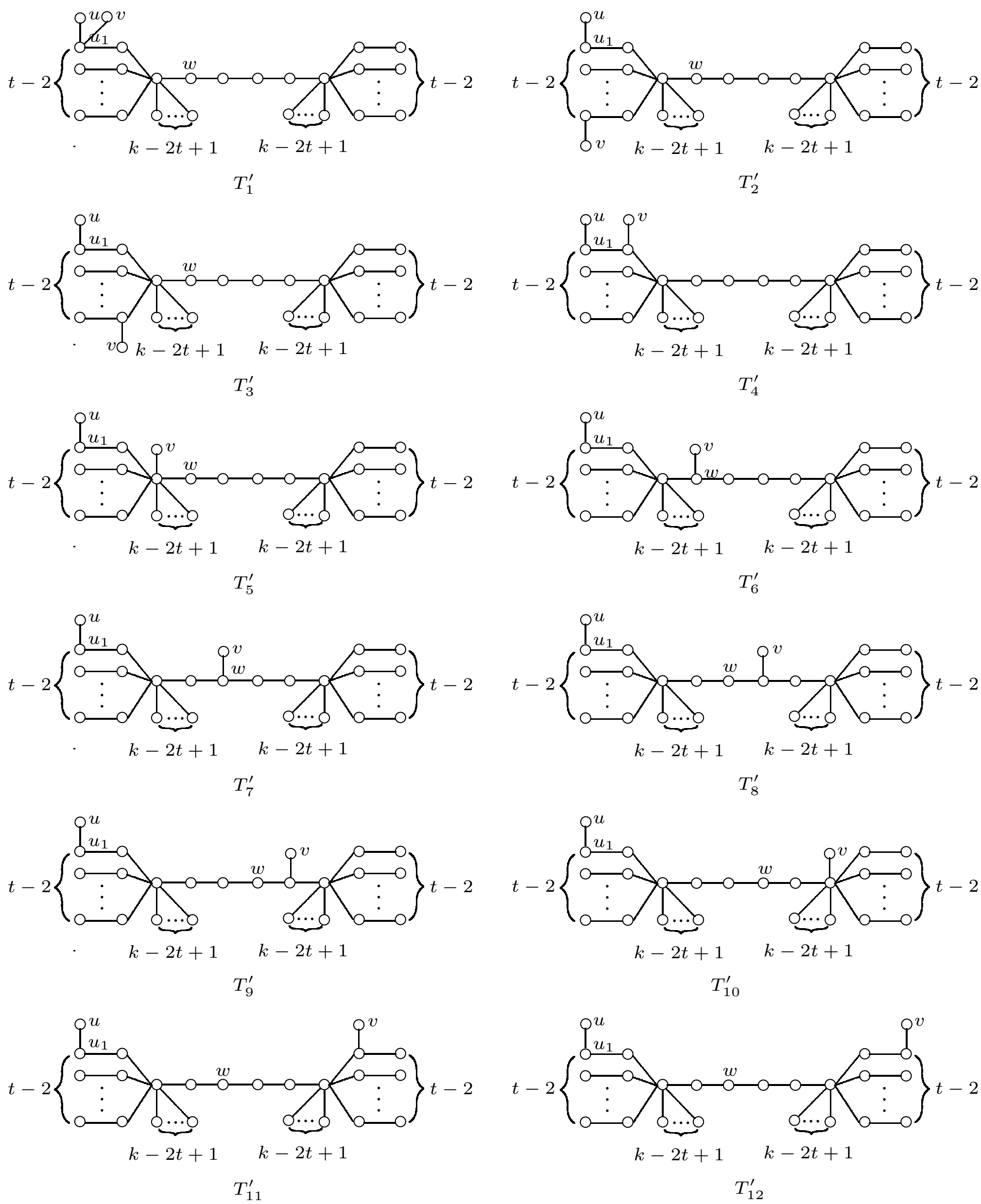
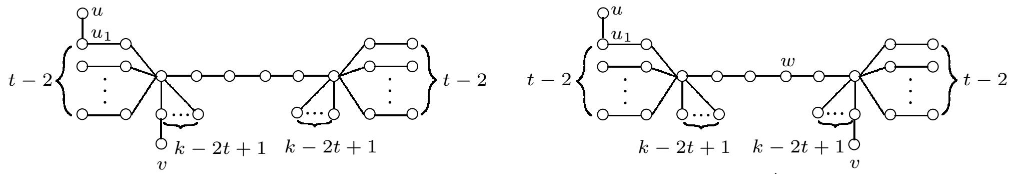


图 12 S_{2k}^{2t}.

情况 1 u 和 u_1 相邻.

在这种情况下, $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t}$ 可能同构于如图 13 所示的 14 个图.





T'_{13} T'_{14}

图 13

情况 1.1 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_1, T'_2$ 或 T'_3.

考虑 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_1$. 设 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong C^t_{k+1} \cup T^{(1)}$. 注意到 $T^{(1)}$ 是一棵有 k 个顶点且有一个 $(t-1)$- 匹配的树，且 $T^{(1)} \ncong A^{t-1}_k$, 由引理 2.6, $\lambda_1(T^{(1)}) < \lambda_1(A^{t-1}_k)$.

若 $\lambda_1(C^t_{k+1}) \le \lambda_1(T^{(1)})$, 则 $\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \max\{\lambda_1(C^t_{k+1}), \lambda_1(T^{(1)})\} = \lambda_1(T^{(1)})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(T^{(1)}) < \lambda_1(A^{t-1}_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的定义矛盾.

若 $\lambda_1(T^{(1)}) < \lambda_1(C^t_{k+1})$, 则 $\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \max\{\lambda_1(C^t_{k+1}), \lambda_1(T^{(1)})\} = \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的定义矛盾，故这种情况是不可能出现的.

若 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_2$ 或 T'_3, 类似地，我们也能得到矛盾.

情况 1.2 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_4$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 1.3 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_5$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong C^{t-1}_k \cup C^t_{k+1}$. 因为 C^{t-1}_k 是 C^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(C^{t-1}_k) < \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.4 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_6$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong K_1 \cup C^{t-1}_{k-1} \cup C^t_{k+1}$. 因为 C^{t-1}_{k-1} 是 C^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(C^{t-1}_{k-1}) < \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.5 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_7$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong K_1 \cup C^{t-1}_k \cup A^t_k$. 若 $\lambda_1(C^{t-1}_k) \le \lambda_1(A^t_k)$, 则由引理 2.2 和 2.11, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^t_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾. 若 $\lambda_1(A^t_k) < \lambda_1(C^{t-1}_k)$, 则 $\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^{t-1}_k)$. 因为 C^{t-1}_k 是 C^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(C^{t-1}_k) < \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^{t-1}_k) < \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.6 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_8$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong C^{t-1}_k \cup C^t_{k+1}$. 使用与情况 1.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 1.7 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_9$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^t_k \cup C^t_{k+1}$. 因为 A^t_k 是 C^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(A^t_k) < \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.8 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{10}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-w \cong A^{t-1}_k \cup C^t_{k+1}$. 若 $\lambda_1(A^{t-1}_k) \le \lambda_1(C^t_{k+1})$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾. 若 $\lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_1(A^{t-1}_k)$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^{t-1}_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.9 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{11}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-w \cong C^{t-1}_k \cup B^t_{k+1}$. 因为 C^{t-1}_k 是 C^t_{k+1} 的真子图, 由引理 2.3 和 2.7, $\lambda_1(C^{t-1}_k) < \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 1.10 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{12}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong C^{t-1}_k \cup C^t_{k+1}$. 使用与情况 1.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 1.11 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{13}$.

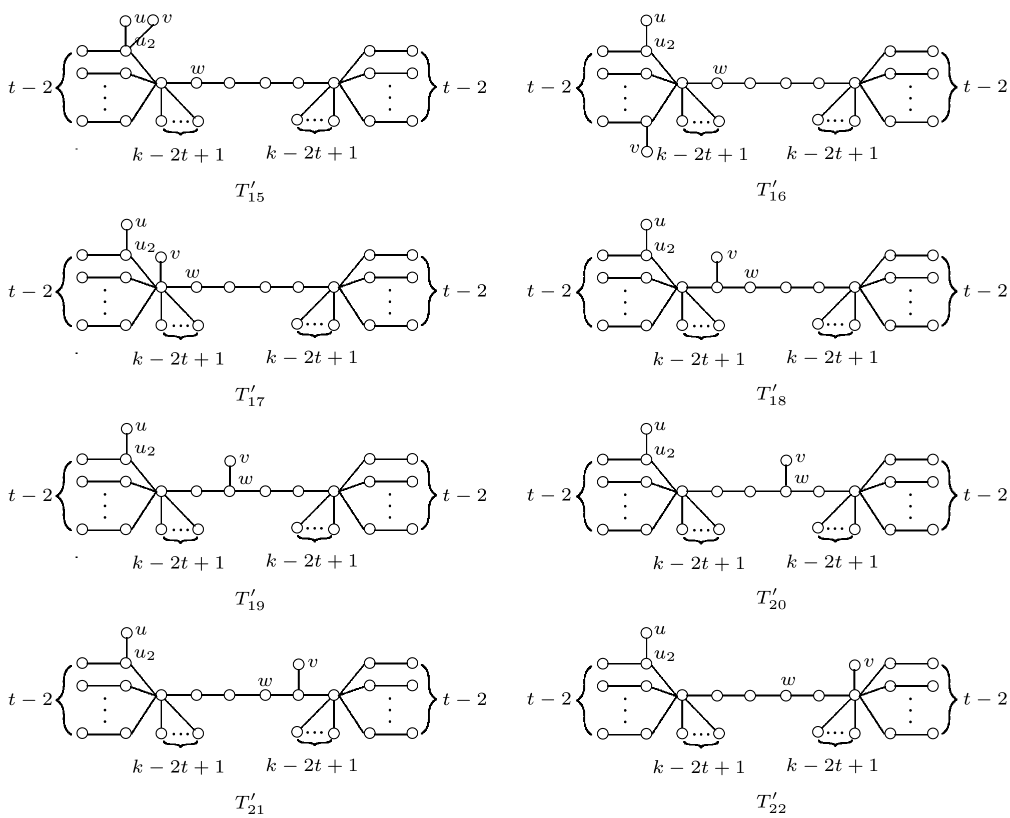
易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配, 与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 1.12 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{14}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-w \cong A^t_k \cup C^t_{k+1}$. 因为 A^t_k 是 C^t_{k+1} 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A^t_k) < \lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(C^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2 u 和 u_2 相邻.

在这种情况下， $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 可能同构于如图 14 所示的 11 个图.



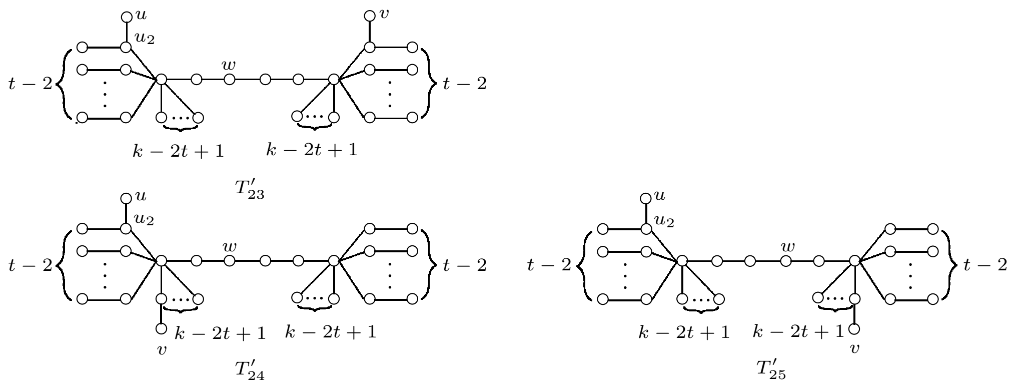


图 14

情况 2.1 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{15}$ 或 T'_{16}.

设 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong C^t_{k+1} \cup T^{(2)}$ 或 $C^t_{k+1} \cup T^{(3)}$. 注意到 $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ 都是有 k 个顶点且有一个 $(t-1)$- 匹配的树，使用与情况 1.1 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 2.2 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{17}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong B^{t-1}_k \cup C^t_{k+1}$. 注意到 B^{t-1}_k 是 B^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3 和 2.7, $\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \max\{\lambda_1(B^{t-1}_k), \lambda_1(C^t_{k+1})\} < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) < \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2.3 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{18}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^t_k \cup B^t_{k+1}$. 因为 A^t_k 是 B^t_{k+1} 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A^t_k) < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2.4 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{19}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong K_1 \cup B^{t-1}_k \cup A^t_k$. 注意到 K_1, B^{t-1}_k 和 A^t_k 都是 B^t_{k+1} 的真子图. 由引理 2.3, $\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \max\{\lambda_1(K_1), \lambda_1(B^{t-1}_k), \lambda_1(A^t_k)\} < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) < \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2.5 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{20}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong K_1 \cup A^{t-1}_{k-1} \cup B^t_{k+1}$. 因为 A^{t-1}_{k-1} 是 B^t_{k+1} 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A^{t-1}_{k-1}) < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2.6 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{21}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^t_k \cup B^t_{k+1}$. 使用与情况 2.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 2.7 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{22}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^{t-1}_k \cup B^t_{k+1}$. 若 $\lambda_1(A^{t-1}_k) \le \lambda_1(B^t_{k+1})$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾. 若 $\lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_1(A^{t-1}_k)$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^{t-1}_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 2.8 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{23}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong B^{t-1}_k \cup B^t_{k+1}$. 因为 B^{t-1}_k 是 B^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(B^{t-1}_k) < \lambda_1(B^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(B^t_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛

盾.

情况 2.9 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{24}$ 或 T'_{25}.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w \cong A_k^t \cup B_{k+1}^t$. 使用与情况 2.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3 u 和 u_3 相邻.

在这种情况下，$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t}$ 可能同构于如图 15 所示的 8 个图.

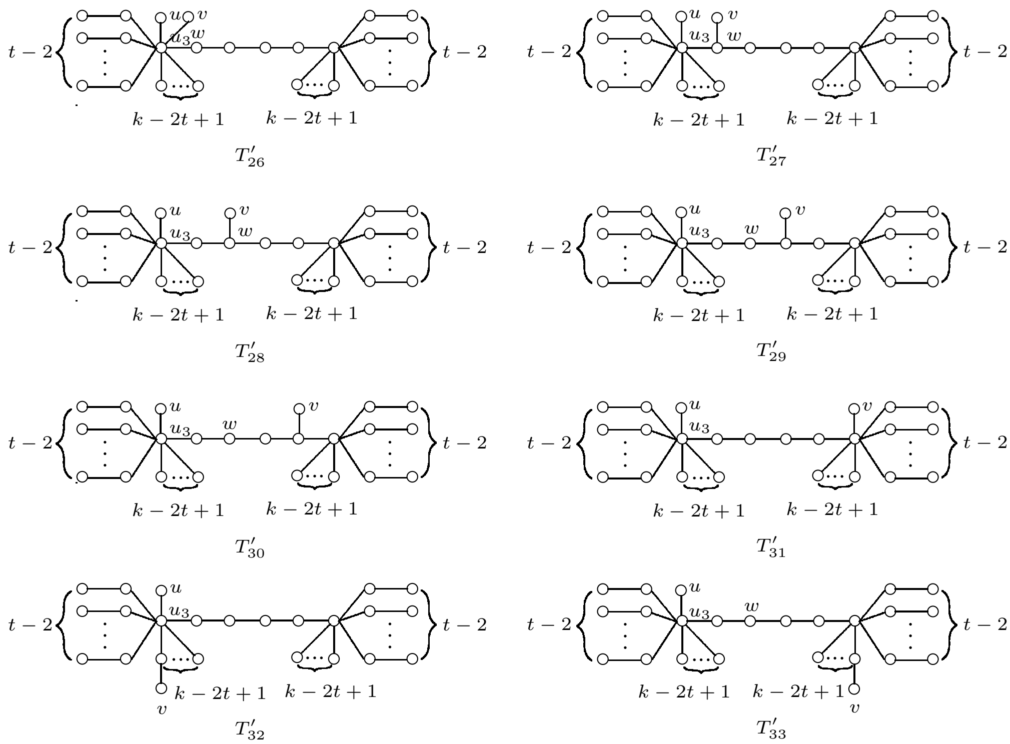


图 15

情况 3.1 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{26}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w \cong A_k^{t-1} \cup C_{k+1}^t$. 使用与情况 1.8 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3.2 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{27}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w \cong K_1 \cup A_{k-1}^{t-1} \cup C_{k+1}^t$. 因为 A_{k-1}^{t-1} 是 C_{k+1}^t 的真子图, 由引理 2.3, $\lambda_1(A_{k-1}^{t-1}) < \lambda_1(C_{k+1}^t)$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w) = \lambda_1(C_{k+1}^t) < \lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})$, 矛盾.

情况 3.3 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{28}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w \cong K_1 \cup A_k^{t-1} \cup A_k^t$. 若 $\lambda_1(A_k^{t-1}) \le \lambda_1(A_k^t)$, 则由引理 2.2 和 2.11, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w) = \lambda_1(A_k^t) < \lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})$, 矛盾. 若 $\lambda_1(A_k^t) < \lambda_1(A_k^{t-1})$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t}) \le \lambda_1(\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w) = \lambda_1(A_k^{t-1}) < \lambda_2(S_{2(k+1)}^{2t})$, 矛盾.

情况 3.4 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{29}$.

$\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} - w \cong A_k^{t-1} \cup C_{k+1}^t$. 使用与情况 1.8 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3.5 $\widetilde{T}_{2(k+1)}^{2t} \cong T'_{30}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^{t-1}_k \cup B^t_{k+1}$. 使用与情况 2.7 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 3.6 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{31}$.

此时，$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{31} = S^{2t}_{2(k+1)}$, 这正是我们想要证明的结果.

情况 3.7 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{32}$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 3.8 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{33}$.

若 $k = 2t$, 则 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^{t-1}_k \cup \widehat{T}$, 此处 $\widehat{T}$ 是如图 5 所示的树．由引理 2.8, $\lambda_1(\widehat{T}) \le \lambda_1(A^{t-1}_{2t}) = \lambda_1(A^{t-1}_k)$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^{t-1}_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

若 $k \ge 2t+1$, 则 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^{t-1}_k \cup A^{t+1}_{k+1}$. 若 $\lambda_1(A^{t-1}_k) \le \lambda_1(A^{t+1}_{k+1})$, 则由引理 2.2 和 2.11, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^{t+1}_{k+1}) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾．若 $\lambda_1(A^{t+1}_{k+1}) < \lambda_1(A^{t-1}_k)$, 则由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}) \le \lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w) = \lambda_1(A^{t-1}_k) < \lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 4 u 和 u_4 相邻.

在这种情况下，$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 可能同构于如图 16 所示的 6 个图.

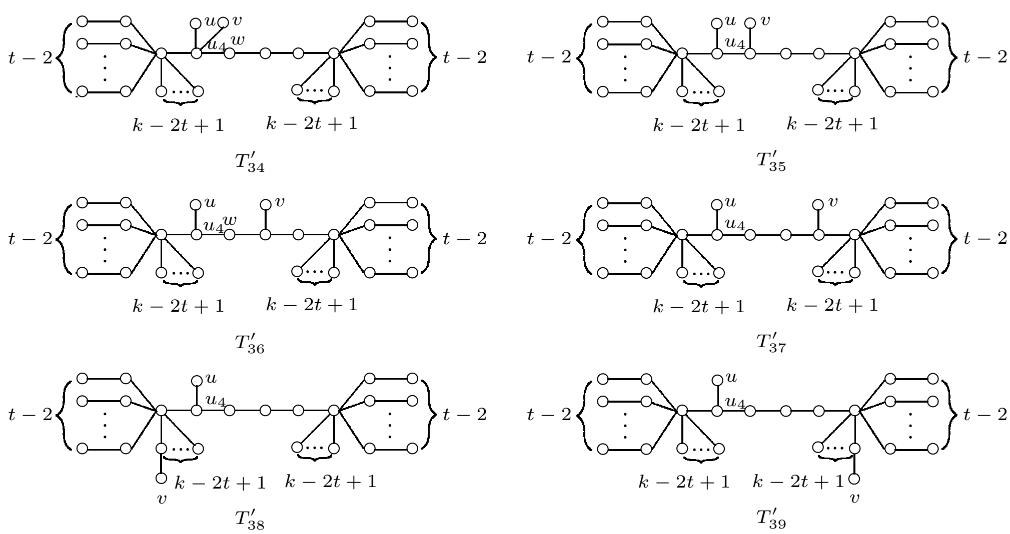


图 16

情况 4.1 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{34}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^t_k \cup B^t_{k+1}$. 使用与情况 2.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 4.2 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{35}$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 4.3 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{36}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} - w \cong A^t_k \cup C^t_{k+1}$. 使用与情况 1.7 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 4.4 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{37}$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 4.5 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{38}$.

设 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u_4\cong K_1\cup C^t_{k+1}\cup T^{(4)}$. 注意到 $T^{(4)}$ 是 C^t_{k+1} 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(T^{(4)})<\lambda_1(C^t_{k+1})$. 由引理 2.2 和 2.13, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)})\le\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u_4)=\lambda_1(C^t_{k+1})<\lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 4.6 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{39}$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 5 u 和 u_5 相邻.

在这种情况下， $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 可能同构于如图 17 所示的 4 个图.

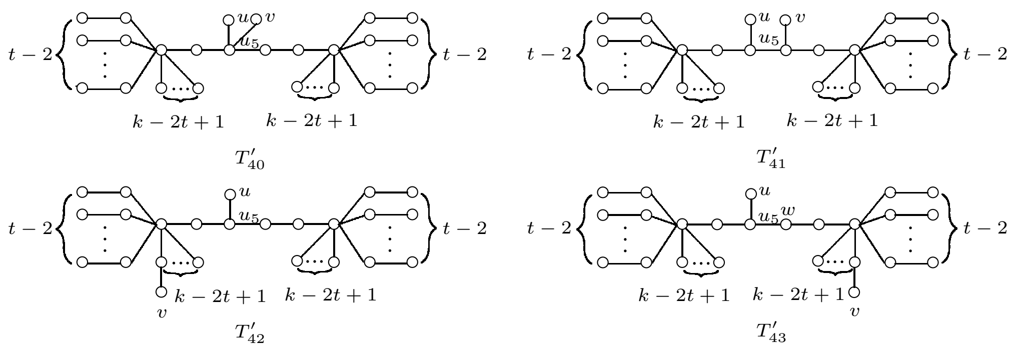


图 17

情况 5.1 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{40}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u_5\cong 2K_1\cup A^{t-1}_{k-1}\cup A^t_k$. 因为 A^{t-1}_{k-1} 是 A^t_k 的真子图，由引理 2.3, $\lambda_1(A^{t-1}_{k-1})<\lambda_1(A^t_k)$. 由引理 2.2 和 2.11, $\lambda_2(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)})\le\lambda_1(\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u_5)=\lambda_1(A^t_k)<\lambda_2(S^{2t}_{2(k+1)})$, 矛盾.

情况 5.2 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{41}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-u_5\cong K_1\cup A^{t-1}_{k-1}\cup C^t_{k+1}$. 使用与情况 3.2 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 5.3 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{42}$.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

情况 5.4 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{43}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-w\cong A^t_k\cup C^t_{k+1}$. 使用与情况 1.7 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 6 u 和 u_6 相邻.

在这种情况下， $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 可能同构于如图 18 所示的 3 个图.

情况 6.1 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{44}$.

$\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}-w\cong A^t_k\cup B^t_{k+1}$. 使用与情况 2.3 相同的证明，我们也能得到矛盾.

情况 6.2 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}\cong T'_{45}$ 或 T'_{46}.

易见 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 有一个基数为 $2t+1$ 的匹配，与 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)}$ 的最大匹配的基数为 $2t$ 矛盾.

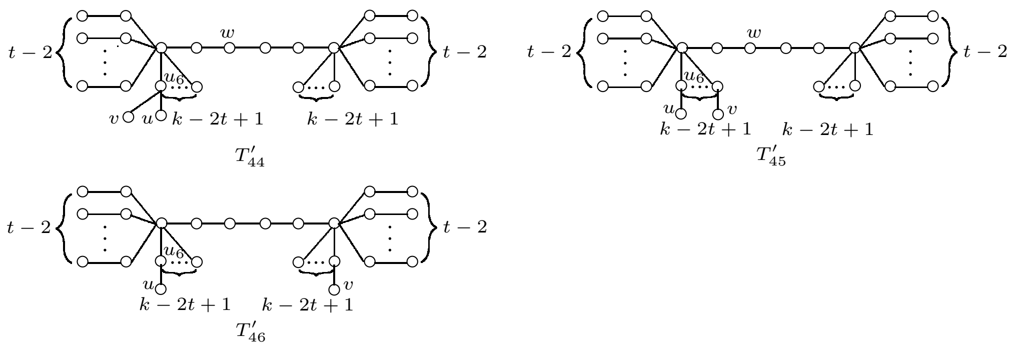


图 18

现在，我们得到了 $\widetilde{T}^{2t}_{2(k+1)} \cong T'_{31} = S^{2t}_{2(k+1)}$，因为已经讨论了所有可能的情况，故定理 3.2 的证明完成．证毕．

参 考 文 献

[1] Chang A. Bounds on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Linear Algebra and its Applications*, 1998, 283(1-3): 247–255

[2] Guo J M, Tan S W. A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Linear Algebra and its Applications*, 2002, 347(1-3): 9–15

[3] Guo J M, Tan S W. A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, 380: 125–134

[4] Hou Y P, Li J S. Bounds on the largest eigenvalues of trees with a given size of matching. *Linear Algebra and its Applications*, 2002, 342(1-3): 203–217

[5] Cvetković D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graphs: Theory and Application. New York: Academic Press, 1980

[6] 张福基，张知难，张云许． 关于图的最大特征根的若干定理． 新疆大学学报 *(*自然科学版*)*, 1984, 3: 84–90

(Zhang F J, Zhang Z N, Zhang Y H. Some theorems about the largest eigenvalue of graphs. *Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition)*, 1984, 3: 84–90)

[7] Chang A. On the largest eigenvalue of a tree with perfect matchings. *Discrete Mathematics*, 2003, 269(1-3): 45–63

[8] Cvetković D, Rowlinson P. The largest eigenvalue of a graph: a survey. *Linear and Multilinear Algebra*, 1990, 28(1-2): 3–33

[9] Guo J M, Tan S W. On the spectral radius of trees. *Linear Algebra and its Applications*, 2001, 329(1-3): 1–8

[10] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. New York: Springer, 2007

Bounds on the Second Largest Eigenvalues of Trees

ZHANG Guozhen

(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

(*E-mail: guozhen@sxu.edu.cn*)

Abstract Guo and Tan in [Ji-Ming Guo, Shang-Wang Tan, A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings, Linear Algebra and its Applications 347 (1–3) (2002) 9-15] and [Ji-Ming Guo, Shang-Wang Tan, A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings, Linear Algebra and its Applications 380 (2004) 125-134] presented the upper bounds for the second largest eigenvalue of a tree on $2k$ vertices with perfect matchings in terms of the number of vertices and characterized the trees whose second largest eigenvalues attain the upper bounds. In this paper, we present the upper bounds for the second largest eigenvalue of a tree on $2k$ vertices in terms of the number of vertices and the size of maximum matchings and characterize the trees whose second largest eigenvalues attain the upper bounds.

Key words tree; matching; eigenvalue; upper bound

MR(2000) Subject Classification 05C05; 05C50

Chinese Library Classification O157.5