第 40 卷 第 6 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 40 No. 6
2017 年 11 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Nov., 2017

广义 Corona 积图的度量维研究 *

武　建 †

(山西财经大学应用数学学院，太原 030006)

(E-mail: wujian@sxufe.edu.cn)

赵海霞

(山西财经大学统计学院，太原 030006)

李　璇

(山西财经大学应用数学学院，太原 030006)

摘　要　图的分辨集和度量维问题是与网络 (顶点) 信息识别有关的一类涉及包括机器人导航和网络入侵者定位问题在内的多个实际研究邻域的重要组合优化问题. 一些大型网络可以看作是通过图的乘积运算而得到. 本文定义了广义 Corona 积图. 研究并刻画了积图分辨集和基的一般构成特性，得出了积图度量维的界. 基于子图顶点距离划分，给出了积图度量维的一般计算公式；建立了寻找积图基的算法和计算积图度量维的 0-1 整数规划模型. 作为应用，计算了一些特殊广义 Corona 积图的度量维.

关键词　Corona 积；分辨集；表征；度量维；距离

MR(2000) 主题分类　05C12

中图分类　O157.5

1　引言

设 $G=(V,E)$ 是简单连通图, 其顶点集和边集分别为 V 和 E. 任意顶点 $u,v\in V(G)$ 的距离是指顶点 u,v 在图 G 中最短 $u-v$ 路径的长度，记作 $d_G(u,v)$. 图 G 的直径是指任意两顶点间距离的最大值，记作 $\mathrm{diam}\,(G)$. 若 $u,v\in V(G)$ 相邻，则记 $u\sim v$. 若图 G 的顶点集是无限的，则称图 G 为无限图. 若图 G 的每个顶点的度均有限，则称图 G 局部有限. 若存在正整数 M, 使得无限图 G 的顶点度均不超过 M, 则称无限图 G 一致局

本文 2017 年 6 月 12 日收到. 2017 年 10 月 12 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (11626149) 资助项目.
† 通讯作者.

部有限. P_∞ 表示顶点集为 $V(P_\infty)=\{\ u_i \mid i=0,1,\cdots\ \}$ 的路. 顶点 $u_i \sim u_j$ 当且仅当 $|\ i-j\ |=1$. 将两个无限路的端点都连接到另外一个新的顶点上即得无限路 $P_{2\infty}$. 记顶点数无限的无限完全图为 K_∞.

关于网络目标 (顶点) 的定位问题, 最早由 Slater[1] 提出. 随后, Harary 和 Melter[2] 对该问题也进行了独立研究. [3] 最先将该问题应用到机器人航行网络中. 在实际的机器人航行网络中, 机器人通过网络通信和基于传感器的两点间距离探测, 从网络的一个点移动到另一个点. 如果将机器人和探测点看作图上的顶点, 两点间的通信关系看作边, 那么机器人航行网络就构成了一个图 (复杂航行网络的抽象). 于是, 机器人如何在复杂网络中确定自己的位置问题, 就转化成了如何在图中分辨每个顶点的问题, 即唯一地表征每个顶点的问题. [3] 证明了表征图中每个顶点的问题是一个 NP- 难题.

定义 1.1[4] 设 $W=\{\ w_j \mid j=1,2,\cdots,k\ \}$ 是图 G 的一个有序顶点子集. 顶点 $v\in V(G)$ 关于 W 的表征是一个 $k-$ 维向量,

$$r_G(v|W)=\big(d_G(v,w_1),d_G(v,w_2),\cdots,d_G(v,w_k)\big).$$

若对任意两顶点 $u,v\in V(G)$ 有 $r_G(u|W)\neq r_G(v|W)$ 成立, 则每个顶点具有唯一的 k- 维向量表征, 并称 W 是图 G 的一个分辨集. 顶点数最小的分辨集称为图 G 的一个基, 其顶点数为图 G 的度量维, 记作 $\dim(G)$.

例如, 图 G (图 1) 的一个分辨集是 $W=\{\ u,v\ \}$, 因为各顶点的距离向量表征为:

$$r_G(u|W)=(0,1);\qquad r_G(v|W)=(1,0);\qquad r_G(w|W)=(2,1);$$
$$r_G(x|W)=(3,2);\qquad r_G(y|W)=(2,3);\qquad r_G(z|W)=(1,2),$$

各顶点的表征互不相同. 可以验证、图 G 中单个顶点不构成分辨集. 所以图 G 的度量维 $\dim(G)=2$.

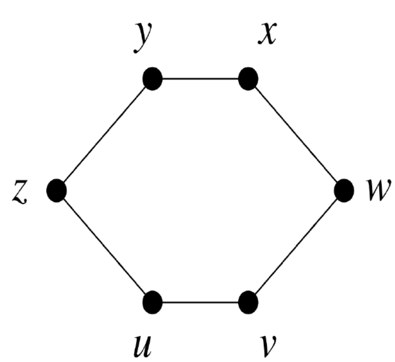

图 1 图 G

图的分辨集和度量维问题不仅涉及多个实际研究邻域 [5], 还与一些重要图论问题有密切联系 [6]. 例如, 当只要求图的相邻顶点具有不同的表征时, 图的分辨集和度量维问题与图的顶点染色问题密切联系. 在实际问题的驱动下, 图的分辨集和度量维的理论研

究涌现出一些新进展：与其它图不变量结合研究图的共同分辨集；从分辨集本身性质出发，研究图的分数阶度量维 [7−10], 图的无孤立点分辨集 [11], 图的 k- 度量维 [12]; 依据所确定目标的个数，研究确定多个目标的图的度量维问题 [13]; 依据实际复杂网络的拓扑结构信息的不完全性，研究拓扑结构信息不完全条件下图的度量维问题 [14].

特殊图类的度量维问题和计算度量维的特殊方法得到了广泛研究 [15−20]. 一些特殊网络可以看作是通过图的乘积运算而得到．[21] 定义了两个图的 Corona 积，并用置换群的知识讨论了 Corona 积与其它图运算的关系．[22–25] 研究了 Corona 积图的度量维．本文第 2 节定义了两个图的广义 Corona 积，且没有文献给出该定义．第 3 节首次研究了一般广义 Corona 积图的分辨集和度量维问题，并得到较好的结果．第 4 节建立了寻找一般广义 Corona 积图基的算法和计算积图度量维的整数规划模型，从而在理论上解决了一般广义 Corona 积图度量维的计算问题．第 5 节和第 6 节分别研究了有限和无限特殊广义 Corona 积图的度量维问题，并得到了一般的度量维计算公式．其它术语见 [26].

2 广义 Corona 积图

定义 2.1[21] 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 n_1 和 n_2 的图．图 G 的顶点集记作 $V(G) = \{\, v_i \mid i = 1, 2, \cdots, n_1 \,\}$. 以下操作构成图 G 和 H 的 *Corona* 积：(1) 复制 n_1 个与图 H 同构的图 $H_1, H_2, \cdots, H_{n_1}$; (2) 将图 G 的第 i 个顶点连接到复制图 H_i 的每个顶点．记图 G 和 H 的 Corona 积图为 $G \odot H$.

[20] 研究了在图中添加一条悬挂边所得图的度量维．[22,23] 研究了通过 Corona 积将一个图的全部顶点添加到另外一个图的每个顶点上所得图的度量维．一般地，能否确定通过 Corona 积将某个图的一部分顶点添加到另外一个图的每个顶点上所得图的度量维？目前，没有文献研究该问题．本文推广了图的 Corona 积，提出了两个图的广义 Corona 积.

定义 2.2 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 n_1 和 n_2 的图．图 G 的顶点集记作 $V(G) = \{v_i | i = 1, 2, \cdots, n_1\}$. S 为 $V(H)$ 的非空子集．以下操作构成图 G 和 H 的广义 Corona 积：(1) 取非空顶点子集 $S \subseteq V(H)$; (2) 复制 n_1 个与图 H 同构的图 $H_1, H_2, \cdots, H_{n_1}$; (3) 将图 G 的第 i 个顶点连接到 S 的复制顶点子集 $S_i \subseteq V(H_i)$ 的每个顶点．记图 G 和 H 的广义 Corona 积图为 $G \odot_S H$.

注 2.3 特别地，当 $S = V(H)$ 时，两个图的广义 Corona 积即为两个图的 Corona 积．定义 2.2 是一般性的定义，且没有文献给出该定义．本文研究了广义 Corona 积图的度量维问题，并得到较好的结果．无特别说明，本文讨论过程中假定广义 Corona 积图总有意义.

3 广义 Corona 积图的分辨集和度量维

设 G 和 H 为顶点数至少为 2 的连通图．本节研究了一般广义 Corona 积图 $G \odot_S H$

的分辨集和度量维．在条件限制较弱的情况下，证明了关于分辨集构成特性的一般结果，计算出了度量维的上界和下界．提出了特殊广义 Corona 积图的度量维计算问题．

定理 3.1 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1 \geq 2$ 和 $n_2 \geq 2$ 的连通图， S 为 $V(H)$ 的非空子集，且 $|S| \in \{2, 3, \cdots, n_2\}$, 则

(1) 若 W 是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集，则 $W \cap V(H_i) \neq \phi$, $i \in \{ 1, 2,\cdots, n_1 \}$;

(2) 若 B 是图 $G \odot_S H$ 的一个基，则 $B \cap V(G) = \phi$.

证 (1) 设 W 是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集，且存在 $i \in \{ 1, 2,\cdots, n_1 \}$ 使得 $V(H_i) \cap W = \phi$. 由定义定义 2.2 知，对于顶点 $v_i \in V(G)$ 和任意的顶点 $u, v \in S_i$ 有

$$d_{G\odot_S H}(u, v_i) = d_{G\odot_S H}(v, v_i) = 1. \tag{3.1}$$

由式 (3.1) 可得，对任意的顶点 $u, v \in S_i$ 和 $w \in W$ 有

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(u, w) =& d_{G\odot_S H}(u, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, w) \\ =& d_{G\odot_S H}(v, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, w) \\ =& d_{G\odot_S H}(v, w) \end{aligned}$$

成立．这与 W 是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集矛盾．

(2) 设 B 是图 $G \odot_S H$ 的一个基，且 $B \cap V(G) \neq \phi$. 我们可以证明， $W' = B - V(G)$ 是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集．对于任意顶点 $x, y \in V(G \odot_S H)$ 分情况讨论：

情况 1 $x, y \in V(G)$. 设 $x = v_i$, $y = v_j$. 则存在顶点 $u \in B \cap V(H_j)$, $j \neq i$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x, u) =& d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ <& d_{G\odot_S H}(v_i, u) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) \\ =& d_{G\odot_S H}(y, u) \end{aligned}$$

成立，即 $W' = B - V(G)$ 可以分辨顶点 x, y.

情况 2 $x \in V(H_i)$, $y \in V(G)$.

若 $y = v_j$, $j \neq i$, 则存在顶点 $u \in B \cap V(H_j)$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x, u) =& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(v_j, u) \\ =& d_{G\odot_S H}(y, u). \end{aligned}$$

若 $y = v_i$, 则存在顶点 $u \in B \cap V(H_l)$, $l \neq i$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x, u) =& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, v_l) + d_{G\odot_S H}(v_l, u) \\ =& d_{G\odot_S H}(x, y) + d_{G\odot_S H}(y, v_l) + d_{G\odot_S H}(v_l, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(y, v_l) + d_{G\odot_S H}(v_l, u) \\ =& d_{G\odot_S H}(y, u), \end{aligned}$$

即 $W' = B - V(G)$ 可以分辨顶点 x, y.

情况 3 $x \in V(H_i)$, $y \in V(H_j)$, $i \neq j$. 由图的距离度量性质可得,

$$d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \geq d_{G\odot_S H}(x, u), \qquad u \in B \cap V(H_i), \tag{3.2}$$

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \geq d_{G\odot_S H}(y, u), \qquad u \in B \cap V(H_j). \tag{3.3}$$

下面进一步分 (a), (b) 两种情形讨论:

(a) $d_{G\odot_S H}(y, v_j) \neq d_{G\odot_S H}(x, v_i)$, 即

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) > d_{G\odot_S H}(x, v_i) \tag{3.4}$$

或

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) < d_{G\odot_S H}(x, v_i). \tag{3.5}$$

由 (1) 知, $B \cap V(H_i) \neq \phi$. 因而存在顶点 $u \in B \cap V(H_i)$, 根据式 (3.2), (3.4) 可得,

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(y, u) =& d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ \geq& d_{G\odot_S H}(x, u). \end{aligned}$$

同理, 由 (1) 知, $B \cap V(H_j) \neq \phi$. 因而存在顶点 $u \in B \cap V(H_j)$, 根据式 (3.3), (3.5) 可得,

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x, u) =& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_i, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \\ \geq& d_{G\odot_S H}(y, u). \end{aligned}$$

(b) $d_{G\odot_S H}(y, v_j) = d_{G\odot_S H}(x, v_i)$. 假设对任意顶点 $u \in B \cap V(H_i)$, 有 $d_{G\odot_S H}(x, u) = d_{G\odot_S H}(y, u)$ 成立, 则

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x, u) =& d_{G\odot_S H}(y, u) \\ =& d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ =& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u), \end{aligned}$$

与式 (3.2) 矛盾. 因而存在顶点 $u \in B \cap V(H_i)$ 使得 $d_{G\odot_S H}(x, u) \neq d_{G\odot_S H}(y, u)$ 成立. 由 (a), (b) 的讨论知, $W' = B - V(G)$ 可以分辨顶点 x, y.

情况 4 $x, y \in V(H_i)$, $i \in \{1, 2, \cdots, n_1\}$. 下面分 (c), (d) 两种情形讨论.

(c) $d_{G\odot_S H}(x,v_i)\neq d_{G\odot_S H}(y,v_i)$. 由 (1) 知，存在 $u\in B\cap V(H_j)$, $j\neq i$ 使得,

$$\begin{aligned}d_{G\odot_S H}(x,u)=&d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ \neq&d_{G\odot_S H}(y,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ =&d_{G\odot_S H}(y,u).\end{aligned}$$

(d) $d_{G\odot_S H}(x,v_i)=d_{G\odot_S H}(y,v_i)$. 此时, 对于任意的顶点 $v\in V(G\odot_S H)\setminus V(H_i)$ 有

$$d_{G\odot_S H}(x,v)=d_{G\odot_S H}(y,v)$$

成立. 因而，存在顶点 $u\in B\cap V(H_i)$ 使得,

$$d_{G\odot_S H}(x,u)\neq d_{G\odot_S H}(y,u)$$

成立. 否则与 B 是图 $G\odot_S H$ 的一个基矛盾. 由 (c), (d) 的讨论知, $W'=B-V(G)$ 可以分辨顶点 x, y. 由情况 1, 2, 3, 4 的讨论知，结论 (2) 成立. 证毕.

随着正整数 $|S|$ 的变化，定理 3.1 给出了一般广义 Corona 积图类的分辨集构成特性. 即在条件限制较弱的情况下，得到了关于积图分辨集的较 [22, 引理 1 (ii), (iii)] 更具有一般性的结论.

定义 3.2 若对顶点 $u\in V(G)$ 和所有顶点 $v\in V(G)\setminus\{u\}$ 满足 $d_G(u,v)=1$, 则称 $u\in V(G)$ 是图 G 的一个支配顶点.

[23, 定理 1] 根据图 H 是否含有支配顶点，给出了 Corona 积图 $G\odot H$ 的度量维计算公式. 由于图 $G\odot_S H$ 的导出子图 $\langle H_i\cup\{v_i\}\rangle$ ($i\in\{1,2,\cdots,|G|\}$) 的连通情况较为复杂，因而能否找到广义 Corona 积图度量维的计算公式是一个较难的问题. 这里，提出根据 H 的类型来确定特殊广义 Corona 积图度量维的公开问题.

问题 3.3 设 G 是顶点数至少为 2 的连通图， $\mathcal{H}$ 是一个由顶点数至少为 2 的连通图构成的图类. 当图 $H\in\mathcal{H}$ 时，能否寻找到广义 Corona 积图 $G\odot_S H$ 的度量维计算公式？

关于这一问题, 本文第 4 节和第 5 节做了部分研究. 下文进一步给出了广义 Corona 积图度量维的界.

定理 3.4 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $|G|\geq 2$ 和 $|H|\geq 2$ 的连通图， S 为 $V(H)$ 的非空子集，且 $|S|\in\{2,3,\cdots,|H|\}$, $H_{v_i}=\langle H_i\cup\{v_i\}\rangle$, $i\in\{1,2,\cdots,|G|\}$, 则

$$|G|(\dim(H_{v_i})-1)\leq\dim(G\odot_S H)\leq|G|\dim(H_{v_i}).$$

证 (1) 显然，若 W_i 是 H_{v_i} 的一个分辨集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{|G|}W_i$ 也是图 $G\odot_S H$ 的一个分辨集. 所以 $\dim(G\odot_S H)\leq|G|\dim(H_{v_i})$ 成立.

(2) 设 B 是图 $G\odot_k H$ 的一个基. 由定理 3.1(2) 知， $B\cap V(G)=\phi$. 这里不妨设 $B_i=B\cap V(H_i)$. 因为度量维 $\dim(H_{v_i})$ 只与 B_i, H_i 和 v_i 有关, 所以下面分两种情况讨论:

情况 1 若对任意顶点 $x, y \in V(H_i)$, 存在顶点 $u \in B_i$, 使得 $d_{G\odot_S H}(x,u) \neq d_{G\odot_S H}(y,u)$ 成立，则 B_i 是 H_i 的一个分辨集．进而， $B_i \cup \{v_i\}$ 是图 H_{v_i} 的一个分辨集．因而

$$\dim(H_{v_i}) \leq |B_i| + 1,$$

即

$$\dim(H_{v_i}) - 1 \leq |B_i|.$$

于是

$$|G|(\dim(H_{v_i}) - 1) \leq \sum_{i=1}^{|G|} |B_i| = |B|,$$

即得

$$|G|(\dim(H_{v_i}) - 1) \leq \dim(G \odot_S H).$$

情况 2 若存在顶点 $x, y \in V(H_i)$, 对任意顶点 $u \in B_i$, 满足 $d_{G\odot_S H}(x,u) = d_{G\odot_S H}(y,u)$, 则必有 $d_{G\odot_S H}(x,v_i) \neq d_{G\odot_S H}(y,v_i)$ 成立．因此 $B_i \cup \{v_i\}$ 是图 H_{v_i} 的一个分辨集，即得

$$|G|(\dim(H_{v_i}) - 1) \leq \sum_{i=1}^{|G|} |B_i| = |B|,$$

即

$$|G|(\dim(H_{v_i}) - 1) \leq \dim(G \odot_S H).$$

由 (1),(2) 的讨论知，结论成立．证毕．

4　广义 Corona 积图度量维的计算

本节研究了广义 Corona 积图度量维的计算问题：基于子图顶点距离划分，得出了广义 Corona 积图基的寻找方法，并给出了积图度量维的一般计算公式；基于子图顶点距离划分，建立了计算广义 Corona 积图度量维的 $0-1$ 整数规划模型．假设 $H_{v_i} = \langle H_i \cup \{v_i\}\rangle$ $(i \in \{1, 2, \cdots, |G|\})$, N 表示子图 H_{v_i} 中所有顶点到顶点 v_i 的不同距离的个数． $G \odot_S H$ 积图的导出子图 H_{v_i} 有一个关于顶点 v_i 的距离划分

$$\mathcal{P} = \{V_{v_i,j} | d(v_i, v_j) = j,\ v_j \in V_j,\ j = 0, 1, \cdots, N\}. \tag{4.1}$$

定理 4.1 若图 H_{v_i} 的一个基为 B_{v_i}, 则 $W = \bigcup_{i=1}^{|G|} (B_{v_i} - \{v_i\})$ 是图 $G \odot_S H$ 的一个基．

证　假设 B 是图 $G \odot_S H$ 的一个基，根据划分 $\mathcal{P}$ (式 (4.1)), 下面分 (1), (2) 完成证明．

(1) 对任意顶点 $x, y \in V(G \odot_S H)$, 分情况证明 $W = \bigcup_{i=1}^{|G|} (B_{v_i} - \{v_i\})$ 是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集．

情况 1 $x \in V_{v_i,m}$，$y \in V_{v_i,l}$，$m \neq l$, 即 $d_{H_{v_i}}(x, v_i) \neq d_{H_{v_i}}(y, v_i)$ 成立. 对任意顶点 $v \in B_{v_j} - \{v_j\}$，$j \neq i$ 有

$$d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, v) \neq d_{G\odot_S H}(y, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, v)$$

成立，即

$$d_{G\odot_S H}(x, v) \neq d_{G\odot_S H}(y, v) \tag{4.2}$$

成立. 由式 (4.2) 即得任意顶点 $x \in V_{v_i,m}$，$y \in V_{v_i,l}$，$m \neq l$ 可由 W 分辨.

情况 2 $x, y \in V_{v_i,m}$. 对任意顶点 $v \in (V(G \odot_k H) \setminus V(H_i)) \cup \{v_i\}$ 有

$$d_{G\odot_S H}(x, v) = d_{G\odot_S H}(y, v),$$

因而存在顶点 $u \in B_{v_i} - \{v_i\}$ 使得

$$d_{H_{v_i}}(x, u) \neq d_{H_{v_i}}(y, u),$$

即

$$d_{G\odot_S H}(x, u) \neq d_{G\odot_S H}(y, u) \tag{4.3}$$

成立. 否则，与 B_{v_i} 是 H_{v_i} 的基矛盾. 由式 (4.3) 即得任意顶点 $x, y \in V_{v_i,m}$ 可由 W 分辨.

情况 3 $x \in V_{v_i,m}$，$y \in V_{v_j,l}$. 由图的距离度量性质可得,

$$d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \geq d_{G\odot_S H}(x, u), \qquad u \in B_{v_i} - \{v_i\}, \tag{4.4}$$

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, u) \geq d_{G\odot_S H}(y, u), u \in B_{v_j} - \{v_j\}. \tag{4.5}$$

下面进一步分 (a), (b) 两种情形讨论：

(a) $m \neq l$, 即

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) > d_{G\odot_S H}(x, v_i) \tag{4.6}$$

或

$$d_{G\odot_S H}(y, v_j) < d_{G\odot_S H}(x, v_i). \tag{4.7}$$

根据式 (4.4), (4.6) 可得,

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(y, u) =& d_{G\odot_S H}(y, v_j) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_j, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ >& d_{G\odot_S H}(x, v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i, u) \\ \geq& d_{G\odot_S H}(x, u). \end{aligned}$$

同理，根据式 (4.5), (4.7) 可得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x,u) =& d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ >& d_{G\odot_S H}(y,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ >& d_{G\odot_S H}(y,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ \geq& d_{G\odot_S H}(y,u). \end{aligned}$$

(b) $m=l$, 即 $d_{G\odot_S H}(y,v_j)=d_{G\odot_S H}(x,v_i)$. 假设对任意顶点 $u\in B_{v_i}-\{v_i\}$, 有 $d_{G\odot_S H}(x,u)=d_{G\odot_S H}(y,u)$ 成立，则

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x,u) =& d_{G\odot_S H}(y,u)\\ =& d_{G\odot_S H}(y,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,u)\\ =& d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_j,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,u)\\ >& d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,u). \end{aligned}$$

与式 (4.4) 矛盾. 因而存在顶点 $u\in B_{v_i}-\{v_i\}$ 使得 $d_{G\odot_S H}(x,u)\neq d_{G\odot_S H}(y,u)$ 成立. 由 (a), (b) 的讨论知， W 可以分辨顶点 x, y.

情况 4 $x=v_i$, $y=v_j$, $j\neq i$, 则存在顶点 $u\in B_{v_j}-\{v_j\}$, $j\neq i$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x,u) =& d_{G\odot_S H}(v_i,u)\\ <& d_{G\odot_S H}(v_i,u)+d_{G\odot_S H}(v_j,v_i)\\ =& d_{G\odot_S H}(y,u) \end{aligned}$$

成立. 即 W 可以分辨顶点 x, y.

情况 5 $x\in V_{v_i,m}$, $y\in V(G)$.

若 $y=v_j$, $j\neq i$, 则存在顶点 $u\in B_{v_j}-\{v_j\}$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x,u) =& d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_j)+d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ >& d_{G\odot_S H}(v_j,u)\\ =& d_{G\odot_S H}(y,u). \end{aligned}$$

若 $y=v_i$, 则存在顶点 $u\in B_{v_l}-\{v_l\}$, $l\neq i$ 使得，

$$\begin{aligned} d_{G\odot_S H}(x,u) =& d_{G\odot_S H}(x,v_i)+d_{G\odot_S H}(v_i,v_l)+d_{G\odot_S H}(v_l,u)\\ =& d_{G\odot_S H}(x,y)+d_{G\odot_S H}(y,v_l)+d_{G\odot_S H}(v_l,u)\\ >& d_{G\odot_S H}(y,v_l)+d_{G\odot_S H}(v_l,u)\\ =& d_{G\odot_S H}(y,u), \end{aligned}$$

即 W 可以分辨顶点 x, y. 若 B 是图 $G\odot_S H$ 的一个基，则由情况 1– 情况 5 可得 $|B|\leq|W|$.

(2) 下文分 (a), (b) 两种情况证明 $|W| \le |B|$. (a) $v_i \in B_{v_i}$. 设 B 是图 $G \odot_S H$ 的一个基，且 $B_i = B \cap V(H_i)$. 根据定理 3.1(2), $B \cap V(G) = \phi$ 成立. 因此，由定理 3.4(左边不等式) 可得 $|B_{v_i} - \{v_i\}| \le |B_i|$, 即得 $|W| \le |B|$. (b) $v_i \notin B_{v_i}$, 即得 $W = B_{v_i} - \{v_i\} = B_{v_i}$. 因为 B_{v_i} 是子图 H_{v_i} 的一个基，所以 $B_{v_i} \cup \{v_i\}$ 是 H_{v_i} 的一个包含顶点 v_i 的最小分辨集. 通过类似于 (1) 的证明过程，可以证明 $B_i \cup \{v_i\}$ 是 H_{v_i} 的一个包含顶点 v_i 的分辨集. 因此，必有 $|B_{v_i} \cup \{v_i\}| \le |B_i \cup \{v_i\}|$ 成立，即 $|B_{v_i}| \le |B_i|$, $|W| \le |B|$. 证毕.

推论 4.2 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $|G| \ge 2$ 和 $|H| \ge 2$ 的连通图，S 为 $V(H)$ 的非空子集，且 $|S| \in \{\, 2, 3, \cdots, |H| \,\}$. $H_{v_i} = \langle H_i \cup \{v_i\} \rangle$, $i \in \{\, 1, 2, \cdots, |G| \,\}$. 图 H_{v_i} 的一个基为 B_{v_i}. 下述结论成立，

(1) 若 $v_i \in B_{v_i}$, 则 $\dim(G \odot_S H) = |G|(\dim(H_{v_i}) - 1)$;

(2) 若 $v_i \notin B_{v_i}$, 则 $\dim(G \odot_S H) = |G|\dim(H_{v_i})$.

证 由定理 4.1 及其证明过程可得结论.

根据定理 4.1 和推论 4.2 在子图距离划分 $\mathcal{P}$ (4.1) 的条件下，可建立寻找图 $G \odot_S H$ 基的算法.

算法 4.3

步 0 假定子图 H_{v_i} 的所有分辨集均包含顶点 v_i;

步 1 在子图 $H_{v_i} \setminus \{v_i\}$ 中寻找最少的顶点来区分每个划分集 $V_{v_i,m}$ $(m = 1, 2,\cdots, N)$ 中的顶点，并记该顶点集为 B_{v_i};

步 2 顶点集 $\bigcup_{i=1}^{|G|}\{(B_{v_i} \cup \{v_i\}) - \{v_i\}\}$ 即为图 $G \odot_S H$ 的一个基.

设非空子集 $S \subseteq V(H_{v_i})$,

$$y_j = \begin{cases} 1, & j \in S; \\ 0, & j \in V(H_{v_i}) \setminus S. \end{cases}$$

一般地，在子图距离划分 $\mathcal{P}$ (4.1) 的条件下，可建立具体的 $0-1$ 整数规划模型来计算图 $G \odot_S H$ 的度量维.

模型 4.4

$$\min \ \sum_{j=1}^{t} y_j, \tag{4.8}$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{t} |d_{hj} - d_{lj}| \ge 1,\ h < l,\ v_h, v_l \in V_{v_i,m},\ V_{v_i,m} \in \mathcal{P} \setminus V_{v_i,0}, \tag{4.9}$$

$$y_j \in \{0,1\}, \qquad 1 \le j \le t. \tag{4.10}$$

其中，$t = |V(H_{v_i}) \setminus \{v_i\}|$; $D = [d_{ij}]$ 表示子图 $H_{v_i} \setminus \{v_i\}$ 按照距离划分 $\mathcal{P}$ (式 (4.1)) 排序后的距离矩阵，$d_{ij} = d(v_i, v_j)$, $v_i, v_j \in V(H_{v_i})$. 因为距离矩阵 D 已知，所以 $|d_{hj} - d_{lj}|$ 是常数. 进而约束条件 (4.9) 是线性的，且当 $|V_{v_i,m}| = 1$, $V_{v_i,m} \in \mathcal{P} \setminus V_{v_i,0}$ 时，$|d_{hj} - d_{lj}|$

$= 0$. 在距离划分 $\mathcal{P}$ (式 4.1) 的条件下，模型 4.4 有 t 个变量，式 (4.9) 最多有

$$\sum_{m=1}^{t} \binom{|V_{v_i,m}|}{2}, \qquad V_{v_i,m} \in \mathcal{P} \setminus V_{v_i,0}$$

个约束条件．由定理 4.1 知，式 (4.8)–(4.10) 确定的每个可行解和顶点 v_i 一起构成了子图 H_{v_i} 的一个包含顶点 v_i 的分辨集，进而由算法 4.3 可得广义 Corina 积图的基．根据定理 3.1(2), 模型 4.4 的最优值的 $|G|$ 倍即为积图 $G \odot_S H$ 的度量维.

5 图 $G \odot_S H$ 的度量维： $H = P_{n_2}, K_{n_2}$

本节讨论当 $H = P_{n_2}, K_{n_2}$ 时，有限图 $G \odot_S H$ 的度量维.

引理 5.1 (见 [22], 注 7) 扇图 $F_{1,n} = K_1 \odot P_n$, 其度量维满足：

$$\dim(F_{1,n}) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 2, & n = 2,3,4,5, \\ 3, & n = 6, \\ \left\lfloor \dfrac{2n+2}{5} \right\rfloor, & n \geq 7. \end{cases}$$

引理 5.2 (见 [23], 定理 1) 设 G 是连通图， H 是顶点数为 $n_2 \geq 2$ 的图．若图 G 含有支配顶点，则 $\dim(G \odot H) = |G| \dim(H)$;

推论 5.3 若 G 是连通图， $H = P_{n_2}$, $n_2 \geq 7$, 则 $\dim(G \odot H) = |G| \left\lfloor \frac{2n_2+2}{5} \right\rfloor$.

证 由引理 5.1 和引理 5.2 可得结论．证毕.

引理 5.4 (见 [25], 引理 5) 设 G 是连通图．在图 G 上添加一条悬挂边 e' 所得图为 G', 则

$$\dim(G) \leq \dim(G') \leq \dim(G) + 1.$$

定理 5.5 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1 \geq 2$ 和 $n_2 \geq 2$ 的连通图，且 $H = P_{n_2}$. 取非空子集 $S \subseteq V(H)$, 且 $|S| \in \{ 2, 3, \cdots, |H| \}$. 设导出子图 $H[S]$ 连通，则下列结论成立：

(1) 若 $|S| = 2, 3$, 则 $\dim(G \odot_S H) = n_1$;

(2) 若 $|S| \in \{ 4, 5, 6 \}$, 则 $\dim(G \odot_S H) = 2n_1$;

(3) 若 $|S| \geq 7$, 则 $\dim(G \odot_S H) = n_1 \left\lfloor \frac{2|S|+2}{5} \right\rfloor$.

证 设 $H_{v_i} = \langle H_i \cup \{v_i\} \rangle$, $|S| = k$. 复制顶点集 $S_i \subseteq V(H_i)$ 中的顶点按照其在路 P_{n_2} 上的连接顺序依次记作 $s_{i,1}$, $s_{i,2}$, $\cdots$, $s_{i,k}$. 记顶点集 $D = \{ s \mid 2 \leq d_H(s_{i,1}, s) \leq \operatorname{diam}(H[S_i]) - 2, s \in S_i \}$. 下面证明结论：

(1) 当 $|S| = 2$ 时，由引理 5.1 知， $\dim(H_{v_i}) = 2$. 容易验证，子图 H_{v_i} 中存在包含顶点 v_i 的基 B_{v_i}. 由推论 4.2(1) 可得结论 (1) 成立．当 $|S| = 3$ 时，通过类似的证明方法可得结论成立.

(2) 当 $|S| = 4$ 时，由引理 5.1 知， $\dim(G \odot_S H) = 2$. 设 B_{v_i} 是子图 H_{v_i} 的一个包含顶点 v_i 的基．于是，有且仅有一个顶点 v $(\in H)$ 使得 $v \in B_{v_i}$. 若顶点 $v = s_{i,1}$, 则存

在顶点 $s_{i,3}$, $s_{i,4}$, 使得 $r_{H_{v_i}}(s_{i,3}|B_{v_i}) = r_{H_{v_i}}(s_{i,4}|B_{v_i})$ 成立．这与 B_{v_i} 是子图 H_{v_i} 的基矛盾．若顶点 $v = s_{i,2}$, $s_{i,3}$, $s_{i,4}$, 则可推出类似矛盾．若顶点 $v \in H \setminus S \neq \phi$, 则存在顶点 w_1, $w_2 \in D$ 使得 $r_{H_{v_i}}(w_1|B_{v_i}) = r_{H_{v_i}}(w_2|B_{v_i})$ 成立．这与 B_{v_i} 是子图 H_{v_i} 的基矛盾．因而，子图 H_{v_i} 的每个基均不含顶点 v_i. 由推论 4.2(2), 可得 $\dim(G \odot_S H) = 2n_1$. 通过类似的证明过程可以证明 $|S| = 5$ 的情形．当 $|S| = 6$ 时，由引理 5.1 知，$\dim(H_{v_i}) = 3$. 取 $W = \{ v_i, s_{i,3}, s_{i,5} \}$ (或 $W = \{ v_i, s_{i,2}, s_{i,4} \}$) $i \in \{ 1,2,\cdots, n_1 \}$. 可以验证，$W$ 是子图 H_{v_i} 的一个分辨集，进而是子图 H_{v_i} 的一个基．由推论 4.2(1) 知，$\dim(G \odot_S H) = 2n_1$.

(3) 设 B 是图 $G \odot H[S]$ 的一个基．下面完成证明：

首先，当 $H[S]$ 连通时，$H[S] \cong P_k$, $G \odot H[S] \cong G \odot P_k$. 对每个 $i \in \{ 1, 2, \cdots, n_1 \}$, 在图 $G \odot P_k$ 上施加如下操作可得图 $G \odot_S H$:

1) 依次添加新顶点 $v_{i,1}$, $v_{i,2}$, $\cdots$, $v_{i,m}$, $m \in \{ 1,2,\cdots, n_2 - k \}$, 并使得顶点 $s_{i,1} \sim v_{i,1}$; $v_{i,1} \sim s_{i,2}$; $\cdots$; $v_{i,m-1} \sim v_{i,m}$;

2) 依次添加新顶点 $v_{i,m+1}$, $v_{i,m+2}$, $\cdots$, v_{i,n_2-k}, 并使得顶点 $s_{i,k} \sim v_{i,m+1}$; $v_{i,m+1} \sim v_{i,m+2}$; $\cdots$; $v_{i,n_2-k-1} \sim v_{i,n_2-k}$. 特别地，当 $m = n_2 - k$ 时，取消据操作 2).

设添加新顶点 $v_{i,1}$, 并使得顶点 $s_{i,1} \sim v_{i,1}$, 所得图为 $G_{i,1}$; 添加新顶点 $v_{i,2}$, 并使得顶点 $v_{i,1} \sim v_{i,2}$, 记所得图为 $G_{i,2}$, 依次类推，由操作 1) 和操作 2) 所得图序列记作

$$\mathfrak{G}\colon G_{i,1}, G_{i,2}, \cdots, G_{i,m}, G_{i,m+1}, G_{i,m+2}, \cdots, G_{i,n_2-k}.$$

通过对 $i \in \{ 1, 2, \cdots, n_1 \}$ 进行归纳可证明 $\dim(G \odot_S H) \geq \dim(G \odot H[S])$:

(a) $i = 1$, $m \in \{ 1,2,\cdots, n_2 - k \}$. 对图序列 $\mathfrak{G}$ 反复利用引理 5.4 可得，

$$\dim(G \odot H[S]) \leq \dim(G_{1,1}) \leq \dim(G_{1,2}) \leq \cdots \leq \dim(G_{1,m+1}) \leq \cdots \leq \dim(G_{1,n_2-k}),$$

即得 $\dim(G_{1,m}) \geq \dim(G \odot H[S])$.

(b) $i = 2$, $m \in \{ 1,2,\cdots, n_2 - k \}$. 对图序列 $\mathfrak{G}$ 反复利用引理 5.4 可得，

$$\dim(G \odot H[S]) \leq \dim(G_{1,m}) \leq \dim(G_{2,1}) \leq \cdots \leq \dim(G_{2,m+1}) \leq \cdots \leq \dim(G_{2,n_2-k}),$$

即得 $\dim(G_{2,m}) \geq \dim(G \odot H[S])$.

(c) 假设当 $i = l$, $m \in \{ 1,2,\cdots, n_2 - k \}$ 时，$\dim(G_{l,m}) \geq \dim(G \odot H[S])$ 成立．

(d) 当 $i = l + 1$, $m \in \{ 1,2,\cdots, n_2 - k \}$ 时，对图序列 $\mathfrak{G}$ 反复利用引理 5.4 可得，

$$\begin{aligned}\dim(G \odot H[S]) &\leq \dim(G_{l,m}) \leq \dim(G_{l+1,1}) \leq \cdots \leq \dim(G_{l+1,m+1}) \\ &\leq \cdots \leq \dim(G_{l+1,n_2-k}),\end{aligned}$$

即得 $\dim(G_{l+1,m}) \geq \dim(G \odot H[S])$. 由引理 5.1 知，$\dim(G \odot H[S]) = \lfloor \frac{2|S|+2}{5} \rfloor$. 因而，$\dim(G \odot_S H) \geq n_1 \lfloor \frac{2|S|+2}{5} \rfloor$.

其次, 类似于定理 4.1 的证明过程, 依据子图顶点距离划分可以证明 B 也是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集．由引理 5.1 知，$\dim(G \odot H[S]) = \lfloor \frac{2|S|+2}{5} \rfloor$. 因而，$\dim(G \odot_S H) \leq |B| = n_1 \lfloor \frac{2|S|+2}{5} \rfloor$. 所以结论 (3) 成立．证毕.

引理 5.6 ([27], 结果 1.2) 设 G 是连通图，顶点集 $S \subseteq V(G)$, 且 $|S| \geq 2$. 若对任意顶点对 $u, v \in S$, 存在顶点 $x \in V(G) - \{ u, v \}$, 使得 $d_G(u,x) = d_G(v,x)$ 成立，则图 G 的任意一个分辨集 W 满足 $|W \bigcap S| \geq |S| - 1$.

引理 5.7 设 $u, v \in S_i \subseteq V(H_i)$, $w \in V(G \odot_S H) \setminus V(H_i)$, 则 $d_{G\odot_S H}(u,w) = d_{G\odot_S H}(v,w)$.

证 由定义 2.2 知，

$$d_{G\odot_S H}(u,v_i) = d_{G\odot_S H}(v,v_i). \tag{5.1}$$

由式 (5.1) 可得，

$$\begin{aligned}d_{G\odot_S H}(u,w) =& d_{G\odot_S H}(u,v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i,w)\\ =& d_{G\odot_S H}(v,v_i) + d_{G\odot_S H}(v_i,w)\\ =& d_{G\odot_S H}(v,w)\end{aligned}$$

推论 5.8 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1 \geq 2$ 和 $n_2 \geq 2$ 的连通图，且 $H = K_{n_2}$. 若任意顶点 $u, v \in S_i \subseteq V(H_i)$, $w \in V(G \odot_S H) \setminus V(H_i)$, 则 $d_{G\odot_S H}(u,w) = d_{G\odot_S H}(v,w)$.

证 由定义 2.2 和引理 5.6 可得结论．证毕.

定理 5.9 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1 \geq 2$ 和 $n_2 \geq 2$ 的连通图，且 $H = K_{n_2}$, 取非空子集 $S \subseteq V(H)$, 且 $|S| \in \{ 2, 3, \cdots, |H| \}$. 设导出子图 $H[S]$ 连通，则下列结论成立：

(1) 当 $|S| = n_2 = 2$ 时， $\dim(G \odot_S H) = n_1$;

(2) 当 $3 \leq |S| = n_2$ 时， $\dim(G \odot_S H) = n_1(n_2 - 1)$;

(3) 当 $3 \leq |S| < n_2$ 时， $\dim(G \odot_S H) = n_1(n_2 - 2)$.

证 由命题广义 Corona 积图定义和引理 5.2 可分别得到结论 (1), (2). 假设 W 和 B 分别是图 $G \odot_S H$ 的一个分辨集和一个基，下面证明结论 (3).

一方面，由定理 3.1(1) 知， $W \cap V(H_i) \neq \phi$. 由推论 5.8 和引理 5.6 知， W 至少包含 $V(H_i)$ 中的 $|V(H_i)| - 2$ 个顶点．于是，

$$|W| \geq |G|(|V(H_i)| - 2) = n_1(n_2 - 2).$$

而 B 是图 $G \odot_S H$ 的一个基，所以也满足

$$|B| \geq |G|(|V(H_i)| - 2) = n_1(n_2 - 2).$$

另一方面，对每个 $i \in \{ 1, 2, \cdots, n_1 \}$, 取顶点 $u \in S_i$ 和顶点 $v \in V(H_i) \setminus S_i$, 构造集合

$$W = \Big(\bigcup_{i=1}^{i=n_1} (S_i \setminus \{u\}) \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{i=n_1} (V(H_i) \setminus S_i - \{v\}) \Big).$$

由推论 5.8 和引理 5.6 可得 W 是图 $G \odot_k H$ 的一个分辨集．于是，$|B| \leq |W| = n_1(n_2 - 2)$. 上述两方面即得结论 (3). 证毕.

6 图 $G\odot_S H$ 的度量维: $H=P_\infty,\ P_{2\infty},\ K_\infty$

若图 G 的所有分辨集均是无限集, 则称图 G 的度量维无限, 或称图 G 不存在有限度量维, 记作 $\dim(G)=\infty$. 否则, 称图 G 存在有限度量维. 本节讨论无限图 $G\odot_S H$ 的度量维. 无特别说明, 图 G 是有限图.

引理 6.1 ([28], 定理 1) 若无限图 G 存在有限度量维, 则无限图 G 一致局部有限.

定理 6.2 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1\geq 2$ 和 $n_2\geq 2$ 的连通图, 且 $H=P_\infty$ 或 $P_{2\infty}$. 取非空子集 $S\subseteq V(H)$, 且 $|S|\in\{\,2,3,\cdots,|H|\,\}$. 设导出子图 $H[S]$ 连通, 则下列结论成立:

(1) 若 $|S|=2,3$ 则 $\dim(G\odot_S H)=n_1$;

(2) 若 $|S|\in\{\,4,5,6\,\}$, 则 $\dim(G\odot_S H)=2n_1$;

(3) 若 $S\geq 7$, 且 $|S|$ 取有限值, 则 $\dim(G\odot_S H)=n_1\lfloor\frac{2|S|+2}{5}\rfloor$.

(4) 若 $|S|\to\infty$, 则 $\dim(G\odot_S H)=\infty$.

证 由定理 5.5 及其证明过程可得结论 (1), (2), (3). 因为图 G 是顶点数至少为 2 的任意连通图, 所以对任意正整数 $M=\deg_G(v)\ \ (v\in G)$, 当 $|S|\to\infty$ 时, 总有

$$\deg_{G\odot_S H}(v)=\deg_G(v)+|S|>M$$

成立. 因而图 $G\odot_S H$ 非一致局部有限. 由引理 6.1 即得结论 (4). 证毕.

定理 6.3 设 G 和 H 是两个顶点数分别为 $n_1\geq 2$ 和 $n_2\geq 2$ 的连通图, 且 $H=K_\infty$. 取非空子集 $S\subseteq V(H)$, 且 $|S|\in\{\,2,3,\cdots,|H|\,\}$. 设导出子图 $H[S]$ 连通, 则 $\dim(G\odot_S H)=\infty$.

证 由引理 5.6 可得结论.

致谢 本文作者感谢专家评委和编委老师的鼓励和细心指导.

参 考 文 献

[1] Slater P J. Leaves of trees. *Congr. Numer.*, 1975, 14: 549–559

[2] Harary F, Melter R A. On the metric dimension of a graph. *Ars Combin.*, 1976, 2: 191–195

[3] Khuller S, Raghavachari B, Rosenfeld A. Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 1996, 70(3): 217–229

[4] Chartrand G, Eroh L, Johnson M A, Oellermann O R. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 2000, 105(1–3): 99–113

[5] Ramírez-Cruza Y, Oellermann O R. Rodríguez-Velázquez J A. The simultaneous metric dimension of graph families. *Discrete Applied Mathematics*, 2016, 198(10): 241–250

[6] Saenpholphat V, Zhang P. Conditional resolvability in graphs: a survey. *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, 2004, 2004(38): 266–288

[7] Feng M, Lv B, Wang K. On the fractional metric dimension of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2014, 170(1645): 55–63

[8] Feng M, Wang K. On the metric dimension and fractional metric dimension for hierarchical product of graphs. *Applicable Analysis & Discrete Mathematics*, 2013, 7(2): 302–313

[9] Kang C X. On the fractional strong metric dimension of graphs. *Elsevier Science Publishers B V*, 2016, 213: 153–161

[10] Simanjuntak R, Baskoro E T, Miller M, Krismanto D A, Saputro S W. Fractional Metric Dimension of Tree and Unicyclic Graph. *Procedia Computer Science*, 2015, 74(9): 47–52

[11] Chitra P J B, Arumugam S. Resolving Sets without Isolated Vertices. *Procedia Computer Science*, 2015, 74(2): 38–42

[12] Estrada-Moreno A, Rodríguez-Velázquez J A, Yero I G. The k-metric dimension of a graph. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2015, 9(2): 2829–2840

[13] Laihonen T. The metric dimension for resolving several objects. *Information Processing Letters*, 2016, 116(11): 694–700

[14] Zejnilović S, Mitsche D, Gomes J, Sinopoli B. Extending the metric dimension to graphs with missing edges. *Theoretical Computer Science*, 2016, 609(2–4): 384–394

[15] 冯敏. 图的度量维数及相关问题. 北京师范大学, 2012
(Feng M. The metric dimension of graphs and its related problems. *Beijing Normal University*, 2012 http://d.wanfangdata.com.cn/Thesis/Y2211333)

[16] Kuziak D, Rodríguez-Velázquez J A, Yero I G. Computing the metric dimension of a graph from primary subgraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2017, 37(1): 273–293

[17] Guo J, Wang K, Li F. Metric dimension of some distance-regular graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2013, 26(1): 190–197

[18] Guo J, Wang K, Li F. Metric dimension of symplectic dual polar graphs and symmetric bilinear forms graphs. *Discrete Mathematics*, 2013, 313(2): 186–188

[19] Guo J, Li F, Wang K. Resolving sets for four families of distance-regular graphs. *Advances in Geometry*, 2014, 14(1): 129–134

[20] Buczkowski P S, Chartrand G, Poisson C, Zhang P. On k-dimensional graphs and their bases. *Periodica Mathematica Hungarica* 2003, 46(1): 9–15

[21] Frucht R, Harary F. On the corona of two graphs. *Aequationes mathematicae*, 1970, 4(3): 322–325

[22] Yero I G, Kuziak D, Rodríguez-Velázquez J A. On the metric dimension of corona product graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 61(9): 2793–2798.

[23] Iswadi H, Baskoro E T, Simanjuntak R. On the Metric Dimension of Corona Product of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 2011, 2(2): 155–170

[24] Iswadi H, Baskoro E T, Simanjuntak R, Salman A N M. The metric dimension of graph with pendant edges, *Journal of Combinatorial Mathematics & Combinatorial Computing*, 2008, 65: 139–145

[25] Kuziak D, Rodriguez-Velazquez J A, Yero I G. Corrections to the article “The metric dimension of graph with pendant edges” [Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing,

2008, 65: 139–145.]. *Journal of Combinatorial Mathematics & Combinatorial Computing*, 2010, 3(1): 63–89

[26] Bondy B A, Murty U S R. Graph Theory. London: Springer, 2008

[27] Saenpholphat V, Zhang P. Connected Resolvability of Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2003, 53(4): 827–840

[28] Cáceres J, Hernando C, Mora M, Pelayo I M, Puertas M L. On the Metric Dimension of Infinite Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2012, 160(18): 2618–2626

Investigation on the Metric Dimension of Generalized Corona Product Graphs

WU Jian

(*Faculty of Applied Aathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan* 030006, *China*)

(*E-mail: wujian@sxufe.edu.cn*)

ZHAO Haixia

(*School of Statistica, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan* 030006, *China*)

LI Xuan

(*Faculty of Applied Aathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract The problem on resolving set and metric dimension of graphs is a class of important combinatorial optimization problems, related to network (vertices) information identification, involving several practical research fields such as robot navigation and network intruder location problem. Since some networks can be created by graph products, we define the generalized Corona product of two graphs and study the resolving set and metric dimension of these product graphs in this paper. The general structure properties of the resolving sets and bases of these product graphs are characterized. And also, the lower and upper bounds for the metric dimension of these product graphs are obtained. Based on the vertex distance partition of the subgraphs in these product graphs, the general formulas for computing the metric dimension are given. Furthermore, an algorithm and a $0-1$integer programming model are constructed, which are used to find bases and compute the metric dimension of these product graphs, respectively. As an application, the metric dimension of some special families of generalized Corona product graphs is calculated.

Key words Corona product; resolving set; representation; metric dimension; distance

MR(2000) Subject Classification 05C12

Chinese Library Classification O157.5