

具有温储备失效特征和单重休假 Min(N, V)-控制策略的 $M/G/1$ 可修排队系统^{*}

蔡晓丽

(四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610068)

唐应辉[†]

(四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610068)

(四川师范大学基础教学学院, 成都 610068)

(E-mail: tangyh@sicn.edu.cn)

摘要 本文考虑具有温储备失效特征和单重休假 $\text{Min}(N, V)$ -控制策略的 $M/G/1$ 可修排队系统。在该系统中, 服务台有两类故障: 一类是服务台在服务员“广义忙期”中可能发生的故障, 另一类是服务台在没有为顾客服务的时间段内可能发生的温储备故障, 且假设两类故障具有不同的故障率和修复率。运用全概率分解技术、拉普拉斯变换工具以及更新过程理论, 研究了系统的瞬态队长分布和稳态队长分布, 获得了瞬态队长分布的拉普拉斯变换的递推表达式, 得到了在系统容量的优化设计中有重要应用价值的稳态队长分布的递推结果, 并证明了稳态队长的随机分解性质。同时还讨论了当休假时间 $V=0, V\rightarrow\infty$ 与温储备寿命时间 $Y\rightarrow\infty$ 时的特殊情形。最后, 建立了系统长期单位时间内总成本费用函数, 用数值计算例子讨论了最优控制策略 N^* 。

关键词 可修排队系统; 温储备失效; $\text{Min}(N, V)$ -控制策略; 队长分布; 全概率分解技术

MR(2000) 主题分类 62G05; 62N01

中图分类 O212.7

1 引言

目前, 对可修排队系统的研究已取得许多有价值的研究成果^[1-7], 而且对带有 N -策略, D -策略, 以及二维混合策略的一些排队系统(包括离散时间刻画的)也有较深入的研究^[8-16]。但是在对可修排队系统研究的大多数文献中, 作者都是假定服务台在没

本文 2016 年 5 月 20 日收到, 2017 年 3 月 6 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金(71571127) 和国家自然科学基金青年基金(71301111) 资助项目。

[†] 通讯作者。

有为顾客服务的时间期间内处于冷储备(关闭)状态, 服务台不会发生故障。然而实际情况并非如此, 系统在没有为顾客服务期间, 相关设备依然处于运转状态(只是负荷较低)。比如雷达系统, 它是利用电磁波探测目标的电子设备, 发射电磁波对目标进行照射并接收其回波, 由此获得目标至电磁波发射点的距离、距离变化率(径向速度)、方位、高度等信息。整个系统在没有目标信息反射时仍然处于运转状态。类似的还有信息自动接收和处理系统、ATM 网络系统等。因此考虑服务台在没有为顾客服务的时间段内可能发生故障(温储备失效)不仅具有实际意义, 而且还推广了可修排队系统的研究范围。^[17]提出并研究了服务台在忙期和闲期均可能发生故障的 $M/G/1$ 可修排队系统, 且在闲期和忙期具有不同的故障率和修理时间分布, 然后对系统有关的排队指标和服务台有关的可靠性指标作了详细的讨论, 之后一些相应研究文献陆续发表^[18–24]。由于服务员休假或去做辅助性工作可能不在岗, 当服务台发生温储备失效时可能不会立即被发现, 这样服务台发生的温储备失效也就不可能得到立即修理, 只有当需要为顾客服务才可能发现服务台的温储备故障, 进而才对其进行修理。基于上述实际背景, 本文将“温储备失效”和“延迟修理”引入到具有单重休假和 $\text{Min}(N, V)$ - 控制策略的 $M/G/1$ 可修排队系统中, 通过引入顾客的“广义服务时间”、服务员“广义忙期”, 采用全概率分解技术、拉普拉斯变换工具和更新过程理论等经典的数学方法, 研究了系统瞬态队长和稳态队长等排队指标, 得到了瞬态队长分布的拉普拉斯变换的递推表达式, 进一步得到了稳态队长分布的递推结果。从而证明了稳态队长具有随机分解的特性。最后, 利用更新报酬理论及文中的一些结论, 建立该系统的费用模型, 讨论了系统的最优控制策略 N^* 。

系统模型描述如下:

- 1) 顾客到达过程是参数为 $\lambda (> 0)$ 的 Poisson 流, 即是相继到达的间隔时间序列 $\{\tau_i, i \geq 1\}$ 相互独立、同分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$ 。顾客实际所需的服务时间序列 $\{\chi_n, n \geq 1\}$ 相互独立、有任意分布 $G(t), t \geq 0$, 平均服务时间为 $\frac{1}{\mu} (> 0)$ 。
- 2) 系统只有一个服务台, 服务台在服务员“广义忙期”(从服务员开始为顾客服务的时刻起, 直到系统再次变空为止的这一段时间, 包括了服务台可能发生失效而进行修理的时间)的寿命 X 服从参数为 $\alpha (> 0)$ 负指数分布, 即 $X(t) = 1 - e^{-\alpha t}, t \geq 0$, 平均寿命为 $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ 。在服务员“广义忙期”发生故障后可立即得到修理, 其修理时间 Z 服从一般分布 $Z(t) = P\{Z \leq t\}, t \geq 0$, 平均修理时间为 $0 \leq \beta_1 = E(Z) < \infty$ 。
- 3) 在没有为顾客服务的时间段内, 服务台可能发生温储备故障, 其温储备寿命 Y 有一般分布 $Y(t) = P\{Y \leq t\}, t \geq 0$, 平均寿命为 $E(Y)$ 。服务台发生温储备故障时, 不能立即得到修理, 只有当服务员休假结束, 回到系统才知道服务台是否正常。服务台温储备故障的修理时间 W 有一般分布 $W(t) = P\{W \leq t\}, t \geq 0$, 平均修理时间为 $0 \leq \beta_2 = E(W) < \infty$ 。
- 4) 服务员采取基于单重休假的 $\text{Min}(N, V)$ - 控制策略休假规则, 即当系统变空时, 服务员马上开始一次休假, 休假时间 V 服从任意分布 $V(t), t \geq 0$, 且平均休假时间为 $0 \leq E(V) < \infty$ 。在服务员的休假期间, 如果系统中到达的顾客数达到了 N 个, 则服务员马上终止休假并立即回到系统; 如果到达的顾客数没有达到 N 个, 则服务员等到此

次休假结束时才回到系统。回到系统中的服务员，若发现服务台已处于温储备故障则立即修理，服务台修好后再为顾客服务（此时在修理的时间内可能还有顾客到达）；若服务台没有发生温储备故障就立即为系统中的顾客服务。在服务员此次休假结束时系统中没有顾客，服务员同样需要检查服务台是否已发生温储备故障，若服务台已发生温储备故障则立即修理，修好后立即为修理期间内到达的顾客服务，在修理期间内没有到达顾客时服务员留在系统中等待顾客的到达；若服务台没有发生温储备故障，则服务员留在系统中等待顾客的到达，显然，其后顾客的到达可能发生在温储备故障的修理期间，也可能发生在服务台正常期间。这里 $N \geq 1$ 。

5) 服务台在服务员“广义忙期”中发生故障时，正在接受服务的顾客需要等待其修复，修理好后再继续接受服务，已服务过的时间仍然有效，且假定 $\tau, \chi, X, Z, Y, W, V$ 是相互独立的。

6) 在时刻 $t = 0$ ，如果系统是空的，服务员也采取该休假控制策略。

注 1 下面先给出一些符号说明：

$N(t)$ 表示系统在时刻 t 的队长，

$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt$, $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$ 分别表示相应 $G(t)$ 自身的拉普拉斯 (L) 变换和拉普拉斯 - 斯蒂尔切斯 (LS) 变换， $t \geq 0$ ，

$G^{(k)}(t)$ 表示相应 $G(t)$ 的 $k (\geq 1)$ 重卷积，即 $G^{(k)}(t) = \int_0^t G^{(k-1)}(t-x) dG(x)$ ，且 $G^{(0)}(t) = 1$, $G(t) * F(t) = \int_0^t G(t-x) dF(x)$, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$, $t \geq 0$.

2 队长的瞬态分布

记 $\tilde{\chi}_n$ 表示第 n 个顾客的“广义服务时间”（从该顾客开始接受服务的时刻起，直到该顾客服务结束的时间，其中包括在该顾客的服务时间内服务台可能发生多次失效而进行修理的时间），则类似 [25,219 页] 中 (10.1.2) 式，得

$$\tilde{G}(t) \triangleq \tilde{G}_n(t) = P\{\tilde{\chi}_n \leq t\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t Z^{(k)}(t-x) e^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^k}{k!} dG(x), \quad n \geq 1, \quad (1)$$

其拉普拉斯 - 斯蒂尔切斯变换 (LS) 为

$$\tilde{g}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [z(s)]^k \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} dG(t) = g(s + \alpha - \alpha z(s)), \quad (2)$$

平均“广义服务时间”为

$$E(\tilde{\chi}) = -\frac{d}{ds}[\tilde{g}(s)]|_{s=0} = \frac{1 + \alpha \beta_1}{\mu}.$$

得到系统的交通强度 $\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{\mu}(1 + \alpha \beta_1)$.

令 \tilde{b} 表示该系统从一个顾客开始的服务员“广义忙期”长度，记 $\tilde{B}(t) = P\{\tilde{b} \leq t\}$, $\tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\tilde{B}(t)$, 则有如下引理：

引理 1 (见 [25, 220 页, Cor.10.1.1]) 对 $\Re(s) > 0$, $\tilde{b}(s)$ 是方程 $z = \tilde{g}(s + \lambda - \lambda z)$ 在 $|z| < 1$ 内的唯一根, 且

$$\tilde{B}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda x} d\tilde{G}^{(k)}(x), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{B}(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{b}(s) = \begin{cases} 1, & \tilde{\rho} \leq 1, \\ \omega < 1, & \tilde{\rho} > 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$E(\tilde{b}) = \begin{cases} \frac{\tilde{\rho}}{\lambda(1-\tilde{\rho})}, & \tilde{\rho} < 1, \\ \infty, & \tilde{\rho} \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

其中 ω ($0 < \omega < 1$) 是方程 $z = \tilde{g}(\lambda - \lambda z)$ 在 $(0,1)$ 内的根; $\Re(s)$ 表示复变量 s 的实部.

令 $\tilde{b}^{(i)}$ 表示从 i 个顾客开始的服务员 “广义忙期” 长度, 因为到达过程是泊松过程, 所以有^[25]

$$P\{\tilde{b}^{(i)} \leq t\} = \tilde{B}^{(i)}(t), \quad t \geq 0, \quad i \geq 1. \quad (6)$$

又令 $Q_j(t) = P\{\tilde{b} > t \geq 0; N(t) = j\}$ 表示在服务员 “广义忙期” 中队长为 j 的瞬态概率, 且在 $t = 0$ 时只有一个顾客, 服务员 “广义忙期” 刚开始, 即 $Q_1(0) = 1$, $Q_j(0) = 0$, $j > 1$.

引理 2^[25] 记 $q_j^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} Q_j(t) dt$ 为 $Q_j(t)$ 的 L 变换, 对 $\Re(s) > 0$ 和 $j \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} q_j^*(s) &= \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{g}(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-st} [1 - \tilde{G}(t)] \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(s+\lambda)} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_{j-k}^*(s)}{\tilde{b}^k(s)} \left\{ \tilde{b}(s) - \sum_{i=0}^k \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{[\lambda \tilde{b}(s)t]^i}{i!} d\tilde{G}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 当 $j \leq 0$ 时, 求和 $\sum_{k=1}^j = 0$ (下面同).

下面讨论系统队长的瞬态概率分布. 记 $p_{ij}(t) = P\{N(t) = j | N(0) = i\}$ 表示初始时刻有 $i (\geq 0)$ 个顾客的条件下, 在时刻 t 队长为 $j (\geq 0)$ 的瞬态概率, 其 L 变换记为 $p_{ij}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{ij}(t) dt$.

定理 1 当 $\Re(s) > 0$ 和 $i \geq 0$ 时, $p_{i0}(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$p_{i0}^*(s) = \frac{1 - f(s)}{s} \cdot \frac{\tilde{b}^i(s)}{\Pi(s)}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= 1 - \frac{w(\Lambda) + w(s+\lambda)\{f(s)\tilde{b}(s)[1 - y(s+\lambda)] - 1\}}{1 - w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)] \\ &\quad - \tilde{b}(s) \int_0^\infty e^{-st} V(t) \bar{Y}(t) dF(t) - \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{b}^m(s) \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{b}^N(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) dF^{(N)}(t) \\
& + [1 - w(\Lambda)] \\
& \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{b}^m(s) \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) + \tilde{b}^N(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \right\},
\end{aligned}$$

$$\Lambda = s + \lambda - \lambda \tilde{b}(s), \quad w(\Lambda) = \int_0^\infty e^{-\Lambda t} dW(t), \quad w(s + \lambda) = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dW(t), \quad y(s + \lambda) = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dY(t).$$

证 记 $\hat{\tau}_j$ 表示第 $j (\geq 1)$ 个“系统闲期”长度 (从系统刚变空的时刻起, 直到其后第一个顾客到达的时刻为止的这一段时间), 则由到达过程为参数 $\lambda (> 0)$ 的 Poisson 过程知 $P\{\hat{\tau}_j \leq t\} = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

令 $l_k = \sum_{i=1}^k \tau_i, s_k = \sum_{i=1}^k (W_i + Y_i), k \geq 1, l_0 = s_0 = 0$. 显然在时刻 t 队长为零的充分且必要条件是时刻 t 处于系统闲期中, 运用全概率分解技术与更新过程理论, 结合初始条件, 当 $i = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& p_{00}(t) \\
& = P\{0 \leq t < \hat{\tau}_1\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\
& = \bar{F}(t) + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\
& \quad + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\
& = \bar{F}(t) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{V + s_{k-1} + W_k \leq t, Y \leq V, V + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < V + s_{k-1} + W_k; N(t) = 0\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t, Y \leq V, V + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < V + s_k; N(t) = 0\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y + s_{k-1} + W_k \leq t, Y > V, Y + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_{k-1} + W_k; N(t) = 0\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t, Y > V, Y + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_k; N(t) = 0\} \\
& \quad + \int_0^t V(x) \bar{Y}(x) p_{10}(t-x) dF(x) + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\
& \quad + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = 0\}, \tag{9}
\end{aligned}$$

式 (9) 中第二项为

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P\{V + s_{k-1} + W_k \leq t, Y \leq V, V + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < V + s_{k-1} + W_k, \\
& \quad \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V + s_{k-1} + W_k < \hat{\tau}_1 + l_m; N(t) = 0\} \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} Y(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{m0}(t-x-y-z)
\end{aligned}$$

$$\cdot dW(z)d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)]dV(x), \quad (10)$$

式(9)中第三项为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} Y(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{10}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dV(y) dF(x), \quad (11)$$

式(9)中第四项为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y + s_{k-1} + W_k \leq t, Y > V, Y + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_{k-1} + W_k, \\ & \quad \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq Y + s_{k-1} + W_k < \hat{\tau}_1 + l_m; N(t) = 0\} \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} V(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{m0}(t-x-y-z) \\ & \quad \cdot dW(z) d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dY(x), \end{aligned} \quad (12)$$

式(9)中第五项为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} V(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{10}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dY(y) dF(x), \quad (13)$$

式(9)中第七项为

$$\begin{aligned} & P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N-1} P\{V + W \leq t, Y \leq V, \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V < \hat{\tau}_1 + l_m, l_n \leq W < l_{n+1}; N(t) = 0\} \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + l_{N-1} + W \leq t, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, l_n \leq W < l_{n+1}; N(t) = 0\} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \int_0^{t-x} Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{m+n,0}(t-x-y) dW(y) dV(x) \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{V}(x) Y(x) \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{N+n,0}(t-x-y) dW(y) dF^{(N)}(x), \end{aligned} \quad (14)$$

式(9)中第八项为

$$\begin{aligned} & P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = 0\} \\ & = \sum_{m=1}^{N-1} P\{V \leq t, Y > V, \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V < \hat{\tau}_1 + l_m; N(t) = 0\} \\ & \quad + P\{\hat{\tau}_1 + l_{N-1} \leq t, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y > \hat{\tau}_1 + l_{N-1}; N(t) = 0\} \\ & = \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} p_{m0}(t-x) dV(x) + \int_0^t \bar{Y}(x) \bar{V}(x) p_{N0}(t-x) dF^{(N)}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

将(10)–(15)式代入(9)式,作L变换并整理得到

$$\begin{aligned}
 & p_{00}^*(s) \\
 &= \frac{1-f(s)}{s} + \frac{\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)]}{1-w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0}^*(s) \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\
 &+ p_{10}^*(s) \frac{f(s)w(s+\lambda)[1-y(s+\lambda)]}{1-w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)] \\
 &+ p_{10}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} V(t) \bar{Y}(t) dF(t) \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N-1} p_{m+n,0}^*(s) \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \cdot \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} p_{N+n,0}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \cdot \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\
 &+ \sum_{m=1}^{N-1} p_{m0}^*(s) \int_0^\infty \bar{Y}(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \\
 &+ p_{N0}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) \bar{Y}(t) dF^{(N)}(t). \tag{16}
 \end{aligned}$$

当*i*≥1时,有

$$p_{i0}(t) = \int_0^t p_{00}(t-x) d\tilde{B}^{(i)}(x), \tag{17}$$

其L变换为

$$p_{i0}^*(s) = p_{00}^*(s) \cdot \tilde{b}^i(s). \tag{18}$$

把(18)式代入(16)式,整理可得*p*₀₀^{*}(*s*)的表达式.再把*p*₀₀^{*}(*s*)代入(18)式整理可得(8)式,证毕.

定理2 对*R(s)>0*和*i≥0*,有

1) 当*j=1,2,⋯,N-1*时, *p*_{*ij*}(*t*)的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^*(s) &= \sum_{k=1}^i q_{j-i+k}^*(s) \tilde{b}^{k-1}(s) + \frac{\tilde{b}^i(s)}{\Pi(s)} \cdot \left\{ q_j^*(s)\Omega(s) + \kappa_{j,j}(s) + \theta_j(s) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(s+\lambda)t} dt \right\}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

2) 当*j≥N*时, *p*_{*ij*}(*t*)的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^*(s) &= \sum_{k=1}^i q_{j-i+k}^*(s) \tilde{b}^{k-1}(s) + \frac{\tilde{b}^i(s)}{\Pi(s)} \cdot \left\{ q_j^*(s)\Omega(s) + \kappa_{j,N-1}(s) + \theta_j(s) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-(s+\lambda)t} dt \cdot \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \right\}, \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中 $\Pi(s)$ 如定理 1 所述,

$$\begin{aligned}\Omega(s) &= \frac{f(s)w(s+\lambda)[1-y(s+\lambda)]}{1-w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)] + \int_0^\infty e^{-st} V(t)\bar{Y}(t)dF(t), \\ \kappa_{j,m}(s) &= \sum_{n=1}^m \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-n}}{(j-n)!} e^{-(s+\lambda)t} dt \cdot \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t), j \geq m, \\ \theta_j(s) &= \frac{\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)]}{1-w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{q_{j-k}^*(s)A_k(s)}{\tilde{b}^{k+1}(s)} + \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(s+\lambda)t} \bar{W}(t)dt \right\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \pi_{j,m}(s) + \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t) \pi_{j,N}(s) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^\infty \bar{Y}(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \sum_{k=1}^m q_{j-m+k}^*(s) \tilde{b}^{k-1}(s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N q_{j-N+k}^*(s) \tilde{b}^{k-1}(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) \bar{Y}(t)dF^{(N)}(t), j \geq 1, \\ A_k(s) &= w(\Lambda) - \sum_{i=0}^k \int_0^\infty \frac{[\lambda \tilde{b}(s)t]^i}{i!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t), k \geq 0, \\ \pi_{j,m}(s) &= \sum_{k=1}^m \tilde{b}^{k-1}(s) \sum_{n=0}^{j-m+k-1} q_{j-m-n+k}^*(s) \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{j-1} q_{j-k}^*(s) \tilde{b}^{m-k-1}(s) A_{k-1}(s), j \geq 1.\end{aligned}$$

证 首先证明 1). 当 $j = 1, 2, \dots, N-1$ 时, “时刻 t 队长为 j ” 当且仅当“时刻 t 落在服务员假期中且队长为 j ”或者“时刻 t 落在服务员“广义忙期”中且队长为 j ”或者“时刻 t 落在“温储备故障”的修理期间且队长为 j ”. 运用全概率分解技术, 当 $i = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}p_{0j}(t) &= P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\ &\quad + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V + s_{k-1} + W_k, Y \leq V, V + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{V + s_{k-1} + W_k \leq t, Y \leq V, V + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < V + s_{k-1} + W_k; N(t) = j\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t, Y \leq V, V + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < V + s_k; N(t) = j\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V + s_{k-1} + W_k, Y > V, Y + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y + s_{k-1} + W_k \leq t, Y > V, Y + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_{k-1} + W_k; N(t) = j\} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 \leq t, Y > V, Y + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_k; N(t) = j\} \\
& + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V < \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\} + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\
& + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\
& = \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{W}(t-x-y)Y(x) \frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!} e^{-\lambda t} d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dV(x) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} Y(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{mj}(t-x-y-z) \\
& \quad \cdot dW(z) d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dV(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} Y(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{1j}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dV(y) dF(x) \\
& + \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{W}(t-x-y)V(x) \frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!} e^{-\lambda t} d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dY(x) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} V(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{mj}(t-x-y-z) \\
& \quad \cdot dW(z) d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dY(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} V(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{1j}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dY(y) dF(x) \\
& + \int_0^t V(x) \bar{Y}(x) p_{1j}(t-x) dF(x) + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\
& + P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\}, \tag{21}
\end{aligned}$$

式 (21) 中第八项为

$$\begin{aligned}
& P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y \leq \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\
& = P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V, V < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq V; N(t) = j\} \\
& \quad + P\{\hat{\tau}_1 \leq t < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}; N(t) = j\} \\
& \quad + P\{V \leq t < V + W, \hat{\tau}_1 \leq V < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq V; N(t) = j\} \\
& \quad + P\{V + W \leq t, \hat{\tau}_1 \leq V < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq V; N(t) = j\} \\
& \quad + P\{\hat{\tau}_1 + l_{N-1} + W \leq t, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y \leq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}; N(t) = j\} \\
& = P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V, Y \leq V, \hat{\tau}_1 + l_{j-1} \leq t < \hat{\tau}_1 + l_j\} \\
& \quad + \sum_{n=1}^j \int_0^t \bar{W}(t-x)Y(x) \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \frac{[\lambda(t-x)]^{j-n}}{(j-n)!} e^{-\lambda(t-x)} dV(x) \\
& \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \int_0^{t-x} Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{m+n,j}(t-x-y) dW(y) dV(x)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{V}(x)Y(x) \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{N+n,j}(t-x-y) dW(y) dF^{(N)}(x), \quad (22)$$

式(21)中第九项为

$$\begin{aligned} & P\{\hat{\tau}_1 \leq t, V \geq \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1; N(t) = j\} \\ &= P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V, V < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y > V; N(t) = j\} \\ &+ P\{\hat{\tau}_1 \leq t < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y > \hat{\tau}_1 + l_{N-1}; N(t) = j\} \\ &+ P\{V \leq t, \hat{\tau}_1 \leq V < \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y > V; N(t) = j\} \\ &+ P\{\hat{\tau}_1 + l_{N-1} \leq t, V \geq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, Y > \hat{\tau}_1 + l_{N-1}; N(t) = j\} \\ &= P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V, Y > V, \hat{\tau}_1 + l_{j-1} \leq t < \hat{\tau}_1 + l_j\} \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} p_{mj}(t-x) dV(x) \\ &+ \int_0^t \bar{Y}(x) \bar{V}(x) p_{Nj}(t-x) dF^{(N)}(x), \end{aligned} \quad (23)$$

将(22)式第一项和(23)式第一项合并整理得:

$$P\{\hat{\tau}_1 \leq t < V, \hat{\tau}_1 + l_{j-1} \leq t < \hat{\tau}_1 + l_j\} = \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}. \quad (24)$$

将(22)–(24)式代入(21)式中, 作L变换并整理得到

$$\begin{aligned} & p_{0j}^*(s) \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)]}{1 - w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \cdot \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(s+\lambda)t} \bar{W}(t) dt \\ &+ \frac{\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)]}{1 - w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \cdot \sum_{m=1}^\infty p_{mj}^*(s) \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\ &+ \frac{f(s)w(s+\lambda)[1 - y(s+\lambda)]}{1 - w(s+\lambda)y(s+\lambda)} \cdot p_{1j}^*(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} d[Y(t)V(t)] \\ &+ p_{1j}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} V(t) \bar{Y}(t) dF(t) + \int_0^\infty \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(s+\lambda)t} dt \\ &+ \sum_{n=1}^j \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-n}}{(j-n)!} e^{-(s+\lambda)t} dt \cdot \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \\ &+ \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^{N-1} p_{m+n,j}^*(s) \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \cdot \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\ &+ \sum_{n=0}^\infty p_{N+n,j}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \cdot \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} dW(t) \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} p_{mj}^*(s) \int_0^\infty \bar{Y}(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(s+\lambda)t} dV(t) \end{aligned}$$

$$+ p_{Nj}^*(s) \int_0^\infty e^{-st} \bar{V}(t) \bar{Y}(t) dF^{(N)}(t). \quad (25)$$

当 $i \geq 1$ 时, 有

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^i \int_0^t Q_{j-i+k}(t-x) d\tilde{B}^{(k-1)}(x) + \int_0^t p_{0j}(t-x) d\tilde{B}^{(i)}(x), \quad (26)$$

其 L 变换为

$$p_{ij}^*(s) = \sum_{k=1}^i q_{j-i+k}^*(s) \tilde{b}^{k-1}(s) + p_{0j}^*(s) \tilde{b}^i(s). \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (25) 式中, 并注意到当 $j \leq 0$ 时, $q_j^*(s) = 0$, 整理得到 $p_{0j}^*(s)$. 再将 $p_{0j}^*(s)$ 代入 (27) 式得到的 $p_{ij}^*(s)$ 的表达式.

当 $j \geq N$ 时, “时刻 t 队长为 j ” 当且仅当“时刻 t 落在服务员“广义忙期”中且队长为 j ”或者“时刻 t 落在“温储备故障”的修理期间且队长为 j ”. 因此, 运用同样的分解方法, 可以得到

$$\begin{aligned} p_{0j}(t) &= \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{W}(t-x-y) Y(x) \frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!} e^{-\lambda t} d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dV(x) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} Y(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{mj}(t-x-y-z) \\ &\quad \cdot dW(z) d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dV(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} Y(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{1j}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dV(y) dF(x) \\ &+ \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{W}(t-x-y) V(x) \frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!} e^{-\lambda t} d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dY(x) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} V(x) \frac{(\lambda z)^m}{m!} e^{-\lambda(x+y+z)} p_{mj}(t-x-y-z) \\ &\quad \cdot dW(z) d[W^{(k-1)} * Y^{(k-1)}(y)] dY(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^x \int_0^{x-y} V(y) \bar{Y}(x-y-z) p_{1j}(t-x) d[W^{(k)} * Y^{(k-1)}(z)] dY(y) dF(x) \\ &+ \int_0^t V(x) \bar{Y}(x) p_{1j}(t-x) dF(x) \\ &+ \int_0^t \bar{W}(t-x) \bar{V}(x) Y(x) \frac{[\lambda(t-x)]^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda(t-x)} dF^{(N)}(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^t \bar{W}(t-x) Y(x) \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \frac{[\lambda(t-x)]^{j-n}}{(j-n)!} e^{-\lambda(t-x)} dV(x) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \int_0^{t-x} Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{m+n,j}(t-x-y) dW(y) dV(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \bar{V}(x) Y(x) \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} p_{N+n,j}(t-x-y) dW(y) dF^{(N)}(x) \\
& + \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^t \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} p_{mj}(t-x) dV(x) \\
& + \int_0^t \bar{Y}(x) \bar{V}(x) p_{Nj}(t-x) dF^{(N)}(x),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^i \int_0^t Q_{j-i+k}(t-x) d\tilde{B}^{(k-1)}(x) + \int_0^t p_{0j}(t-x) d\tilde{B}^{(i)}(x), \quad i \geq 1. \tag{29}$$

余下的推导过程完全仿照当 $j = 1, 2, \dots, N-1$ 时的推导过程. 证毕.

3 队长的稳态分布

定理 3 令 $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\}, j = 0, 1, 2, \dots$, 则对任意初始状态, 有

1) 当 $\tilde{\rho} \geq 1$ 时, $p_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots$, 从而 $\{p_j, j \geq 0\}$ 不构成概率分布,

2) 当 $\tilde{\rho} < 1$ 时, p_j 存在, 有如下的递推表达式:

$$p_0 = \frac{1}{\lambda \Delta}, \tag{30}$$

$$p_j = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ q_j \Omega + \kappa_{j,j} + \theta_j + \int_0^\infty \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dt \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
p_j &= \frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ q_j \Omega + \kappa_{j,N-1} + \theta_j \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^\infty \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \right\}, \quad j \geq N.
\end{aligned} \tag{32}$$

且此时 $\{p_j, j \geq 0\}$ 构成概率分布, 其中 $q_j = \lim_{s \rightarrow 0^+} q_j^*(s)$ 由引理 2 直接导出,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{\lambda(1-\tilde{\rho})} \left\{ v(\lambda) + \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t) dV(t) \right\} \\
&\quad + \frac{\beta_2}{1-\tilde{\rho}} \left\{ \int_0^\infty Y(t) F(t) dV(t) - \int_0^\infty \bar{V}(t) F^{(N)}(t) dY(t) \right\} \\
&\quad + \frac{\lambda \beta_2 + w(\lambda) - 1}{\lambda(1-\tilde{\rho})[1-w(\lambda)y(\lambda)]} \int_0^\infty V(t) Y(t) dF(t), \\
\Omega &= v(\lambda) + \frac{w(\lambda) - 1}{1-w(\lambda)y(\lambda)} \int_0^\infty V(t) Y(t) dF(t), \\
w(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dW(t), y(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dY(t), v(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dV(t), \\
\kappa_{j,m} &= \sum_{n=1}^m \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-n}}{(j-n)!} e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dV(t), \quad j \geq m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_j &= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda t} d[Y(t)V(t)]}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} q_{j-k} A_k + \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \bar{W}(t) dt \right\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) \pi_{j,m} + \int_0^\infty \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \pi_{j,N} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^\infty \bar{Y}(t) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) \sum_{k=1}^m q_{j-m+k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^N q_{j-N+k} \int_0^\infty \bar{V}(t) \bar{Y}(t) dF^{(N)}(t), \quad j \geq 1, \\
A_k &= \int_0^\infty F^{(k+1)}(t) dW(t), \quad k \geq 0, \\
\pi_{j,m} &= \sum_{k=1}^m \sum_{n=0}^{j-m+k-1} q_{j-m-n+k} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dW(t) + \sum_{k=0}^{j-1} q_{j-k} A_{k-1}, \quad j \geq 1.
\end{aligned}$$

证 根据控制收敛定理, 运用全概率分解方法, 有

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}(t) \cdot P\{N(0) = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(0) = i\} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t),$$

且有

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dp_{ij}(x) + p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^t e^{-sx} dp_{ij}(x) + p_{ij}(0) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-sx} dp_{ij}(x) + p_{ij}(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s p_{ij}^*(s).
\end{aligned} \tag{33}$$

下面求 $\lim_{s \rightarrow 0^+} s p_{ij}^*(s)$. 当 $\tilde{\rho} \geq 1$, 由引理 1 知 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{b}(s) = \omega$ ($0 < \omega < 1$) 或 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{b}(s) = 1$, 此时 $E(\tilde{b}) = \infty$, 并且

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0^+} \Pi(s) &= 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} d[Y(t)V(t)] - \int_0^\infty V(t) \bar{Y}(t) dF(t) - \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) \\
&\quad - \int_0^\infty \bar{V}(t) dF^{(N)}(t) \\
&= 1 - \int_0^\infty V(t) dF(t) - \int_0^\infty [F(t) - F^{(N)}(t)] dV(t) - \int_0^\infty F^{(N)}(t) dV(t) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0^+} \Pi'(s) &= E(\tilde{b})v(\lambda) + \frac{v(\lambda)}{\lambda} + \left[\frac{1}{\lambda} + E(\tilde{b}) \right] \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t) dV(t) \\
&\quad + [1 + \lambda E(\tilde{b})] \beta_2 \int_0^\infty Y(t) F(t) dV(t) \\
&\quad - [1 + \lambda E(\tilde{b})] \beta_2 \int_0^\infty \bar{V}(t) F^{(N)}(t) dY(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [1 + \lambda E(\tilde{b})] \frac{\lambda\beta_2 + w(\lambda) - 1}{\lambda[1 - w(\lambda)y(\lambda)]} \int_0^\infty V(t)Y(t)dF(t) \\
& = \infty.
\end{aligned} \tag{35}$$

使用洛比达法则, 经过计算即可得 $\lim_{s \rightarrow 0^+} sp_{ij}^*(s) = 0$. 从而当 $\tilde{\rho} \geq 1$ 时, $p_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

当 $\tilde{\rho} < 1$ 时, 此时 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{b}(s) = 1$, $E(\tilde{b}) = \frac{\tilde{\rho}}{\lambda(1-\tilde{\rho})}$, 结合上面 (35) 式, 有

$$\begin{aligned}
\Delta &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \Pi'(s) \\
&= \frac{1}{\lambda(1-\tilde{\rho})} \left\{ v(\lambda) + \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t)dV(t) \right\} \\
&\quad + \frac{\beta_2}{1-\tilde{\rho}} \left\{ \int_0^\infty Y(t)F(t)dV(t) - \int_0^\infty \bar{V}(t)F^{(N)}(t)dY(t) \right\} \\
&\quad + \frac{\lambda\beta_2 + w(\lambda) - 1}{\lambda(1-\tilde{\rho})[1 - w(\lambda)y(\lambda)]} \int_0^\infty V(t)Y(t)dF(t).
\end{aligned} \tag{36}$$

再使用洛比达法则, 经运算可得 (30)–(32) 式.

下面证明当 $\tilde{\rho} < 1$ 时, $\{p_j, j \geq 0\}$ 构成概率分布. 证明过程如下:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^\infty p_j &= \frac{1}{\lambda\Delta} + \frac{\Omega}{\Delta} \sum_{j=1}^\infty q_j + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^\infty \theta_j + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^\infty \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_{j,j} \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=N}^\infty \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^\infty \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t) \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=N}^\infty \kappa_{j,N-1},
\end{aligned} \tag{37}$$

经计算可得: $\sum_{j=1}^\infty q_j = E(\tilde{b})$, 且

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty \theta_j &= \frac{\lambda^2 \beta_2 E(\tilde{b}) + \lambda\beta_2 + w(\lambda) - 1}{\lambda[1 - w(\lambda)y(\lambda)]} \int_0^\infty V(t)Y(t)dF(t) + \lambda\beta_2 E(\tilde{b}) \int_0^\infty Y(t)F(t)dV(t) \\
&\quad + E(\tilde{b}) \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t)dV(t) - \lambda\beta_2 E(\tilde{b}) \int_0^\infty \bar{V}(t)F^{(N)}(t)dY(t),
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \kappa_{j,j} + \sum_{j=N}^\infty \kappa_{j,N-1} = \beta_2 \int_0^\infty Y(t)[F(t) - F^{(N)}(t)]dV(t), \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \bar{V}(t)dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t)dV(t) + \frac{v(\lambda) - 1}{\lambda}, \tag{40}$$

$$\sum_{j=N}^\infty \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda t} dt \int_0^\infty \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t) = \beta_2 \int_0^\infty \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t). \tag{41}$$

将(38)–(41)式代入(37)式，并结合 $E(\tilde{b})$ 的表达式，整理得到 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$.

定理4 令 $P_{\text{Min}(N,V)}(z)$ 表示该系统稳态队长分布的概率母函数，则当 $\tilde{\rho} < 1$ 时，有

$$P_{\text{Min}(N,V)}(z) = \frac{(1 - \tilde{\rho})(1 - z)\tilde{g}(\lambda(1 - z))}{\tilde{g}(\lambda(1 - z)) - z} \cdot \frac{Q(z)}{\lambda\Delta(1 - \tilde{\rho})(1 - z)}, \quad |z| < 1, \quad (42)$$

平均队长

$$\begin{aligned} & \bar{L}_{\text{Min}(N,V)} \\ &= \tilde{\rho} + \frac{\lambda^2 E(\tilde{\chi}^2)}{2(1 - \tilde{\rho})} + \frac{1}{2\lambda(1 - \tilde{\rho})\Delta} \left\{ N(N - 1) \int_0^\infty F^{(N)}(t) dV(t) + \sum_{k=2}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} e^{-\lambda t} dV(t) \right. \\ &+ \lambda^2 E(W^2) \left[\int_0^\infty Y(t) F(t) dV(t) - \int_0^\infty \bar{V}(t) F^{(N)}(t) dY(t) + \frac{\int_0^\infty V(t) Y(t) dF(t)}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \right] \\ &+ 2\lambda\beta_2 \left[\sum_{m=1}^N \int_0^\infty Y(t) F^{(m)}(t) dV(t) - N \int_0^\infty \bar{V}(t) F^{(N)}(t) dY(t) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

其中 $E(\tilde{\chi}^2)$ 和 $E(W^2)$ 分别为 $\tilde{\chi}$ 和 W 的二阶原点矩，

$$\begin{aligned} & Q(z) \\ &= 1 - zv(\lambda) - z^N \int_0^\infty F^{(N)}(t) dV(t) - \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda z t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dV(t) \\ &+ \frac{1 - w(\lambda(1 - z)) - (1 - z)(1 - w(\lambda))}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \int_0^\infty V(t) Y(t) dF(t) \\ &+ (1 - w(\lambda(1 - z))) \left[\sum_{m=1}^N \int_0^\infty Y(t) \frac{(\lambda z t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) + z^N \int_0^\infty \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) \right]. \end{aligned}$$

证 由 $P_{\text{Min}(N,V)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j$ ，可得：

$$\begin{aligned} & P_{\text{Min}(N,V)}(z) \\ &= \frac{1}{\lambda\Delta} + \frac{\Omega}{\Delta} \sum_{j=1}^{\infty} z^j q_j + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \theta_j + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} z^j \int_0^\infty \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{N-1} z^j \kappa_{j,j} \\ &+ \frac{1}{\Delta} \sum_{j=N}^{\infty} z^j \int_0^\infty \bar{W}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^\infty \bar{V}(t) Y(t) dF^{(N)}(t) + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=N}^{\infty} z^j \kappa_{j,N-1}, \end{aligned} \quad (44)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} z^j q_j &= \frac{z[1 - \tilde{g}(\lambda(1 - z))]}{\lambda[\tilde{g}(\lambda(1 - z)) - z]}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} z^j \theta_j & \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} z^j q_j\right)}{1-z} \left\{ 1 - v(\lambda) + \frac{1-w(\lambda(1-z))}{1-w(\lambda)y(\lambda)} \int_0^{\infty} V(t)Y(t)dF(t) \right. \\
&\quad - \sum_{m=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda z t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) - z^N \int_0^{\infty} F^{(N)}(t) dV(t) \\
&\quad + (1-w(\lambda(1-z))) \left[\sum_{m=1}^{N-1} \int_0^{\infty} Y(t) \frac{(\lambda z t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dV(t) + z^N \int_0^{\infty} \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t) \right] \left. \right\} \\
&\quad + \frac{1-w(\lambda(1-z)) - (1-z)(1-w(\lambda))}{\lambda[1-w(\lambda)y(\lambda)](1-z)} \int_0^{\infty} V(t)Y(t)dF(t), \tag{46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N-1} z^j \kappa_{j,j} + \sum_{j=N}^{\infty} z^j \kappa_{j,N-1} \\
&= \frac{1-w(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)} \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\infty} Y(t) \frac{(\lambda z t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dV(t), \tag{47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{j=1}^{N-1} z^j \int_0^{\infty} \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{z-z^N}{1-z} [1-v(\lambda)] - \frac{1}{1-z} \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^{\infty} (z^k - z^N) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dV(t), \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=N}^{\infty} z^j \int_0^{\infty} \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^{j-N}}{(j-N)!} e^{-\lambda t} dt \cdot \int_0^{\infty} \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t) \\
&= \frac{z^N [1-w(\lambda(1-z))]}{\lambda(1-z)} \int_0^{\infty} \bar{V}(t)Y(t)dF^{(N)}(t). \tag{49}
\end{aligned}$$

将 (45)–(49) 式代入 (44) 式整理即得 (42) 式. 再由 $\bar{L}_{\text{Min}(N,V)} = \frac{d}{dz}[P_{\text{Min}(N,V)}]|_{z=1}$, 计算即得 (43) 式.

注 2 由本文定理 4 可知, 系统的稳态队长可分解成独立的两部分之和: 一部分是经典的 $M/G/1$ 可修排队系统的稳态队长, 另一部分是由 $\text{Min}(N, V)$ - 策略机制和温储备失效而引起的附加队长.

推论 1 当 $P\{V=0\}=1$ 时, 即是服务员不休假. 该文研究的排队系统等价于温储备失效的 $M/G/1$ 可修排队系统, 在上面所得结果中, 令 $P\{V=0\}=1$ 可以得到与 [22] 相同的结论.

推论 2 当 $P\{V=\infty\}=1$ 时, 该文研究的排队系统等价于温储备失效 N - 策略的 $M/G/1$ 可修排队系统, 当 $\tilde{\rho} < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{(1-\tilde{\rho})(1-z)\tilde{g}(\lambda(1-z))}{\tilde{g}(\lambda(1-z))-z} \\
&\quad \cdot \frac{1-z^N \left\{ 1 - [1-w(\lambda(1-z))] \int_0^{\infty} Y(t)dF^N(t) \right\}}{(1-z)[N+\lambda\beta_2(1-\int_0^{\infty} F^{(N)}(t)dY(t))]}, \quad |z| < 1.
\end{aligned}$$

若令 $Y(t) = 1 - e^{\gamma t}$, 将 $Y(t) = 1 - e^{\gamma t}$ 代入上式, 概率母函数与 [21] 完全相同.

推论 3 当 $P\{Y = \infty\} = 1$ 时, 即是服务台在系统闲期不发生故障, 系统退化成具有单重休假的 $\text{Min}(N, V)$ -策略的 $M/G/1$ 可修排队系统, 当 $\tilde{\rho} < 1$ 时, 有

$$P(z) = \frac{(1 - \tilde{\rho})(1 - z)\tilde{g}(\lambda(1 - z))}{\tilde{g}(\lambda(1 - z)) - z} \cdot \frac{1 - zv(\lambda) - z^N \int_0^\infty F^{(N)}(t) dV(t) - \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda z t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dV(t)}{(1 - z)[v(\lambda) + \Delta_N]}, \quad |z| < 1,$$

其中 $\Delta_N = \sum_{m=1}^N \int_0^\infty F^{(m)}(t) dV(t)$.

若令 $N = 1$, 该排队系统等价于经典的 $M/G/1$ 可修排队系统, 当 $\tilde{\rho} < 1$, 有

$$P(z) = \frac{(1 - \tilde{\rho})(1 - z)\tilde{g}(\lambda(1 - z))}{\tilde{g}(\lambda(1 - z)) - z}, \quad |z| < 1.$$

4 费用模型下的最优控制策略 N^*

建立的费用模型如下:

- 1) 每个顾客在系统中的逗留 (包括等待和服务) 单位时间的成本费用为 h 个单位,
- 2) 服务台在服务员“广义忙期”中发生故障时, 服务台单位时间的维修费用为 c_z 个单位. 服务台发生温储备故障时, 单位时间的维修费用为 c_w 个单位,
- 3) 一个周期内, 系统的固定消耗费用 (例如系统的转换费用) 为 c_0 个单位.

记 $C(N)$ 为系统在该控制策略下长期运行单位时间所产生的期望费用, 由更新报酬理论知: $C(N)$ 等于一个更新周期内的期望费用与一个更新周期的期望长度的比值.

下面, 将分别来计算一个更新周期内的期望费用和期望长度. 根据系统的模型假设, 可以分下面几种情况讨论:

(1) 服务员休假回到系统, 系统中无顾客等待, 这时服务员需要留在系统, 检查服务台是否已经发生温储备故障, 且第一个顾客的到达发生在某个温储备故障的修理期间 W_k ($1 \leq k < \infty$) 中, 同时在 W_k 到达了 m ($1 \leq m < \infty$) 个顾客. 若服务员休假回到系统发现服务台已经发生了温储备故障, 其概率为

$$\begin{aligned} q_1(k, m) \\ = & P\{V + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 < V + s_{k-1} + W_k, Y \leq V, \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V + s_{k-1} + W_k < \hat{\tau}_1 + l_m\} \\ = & [w(\lambda)y(\lambda)]^{k-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^m}{m!} e^{-\lambda y} dW(y) \int_0^\infty Y(x) e^{-\lambda x} dV(x). \end{aligned}$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_1) = E(V) + kE(W) + (k-1)E(Y) + mE(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_1) = mE(\tilde{b})$.

若服务员休假回到系统发现服务台没有发生温储备故障, 其概率为

$$\begin{aligned} q_2(k, m) &= P\{Y + s_{k-1} \leq \hat{\tau}_1 \leq Y + s_{k-1} + W_k, Y > V, \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq Y + s_{k-1} + W_k < \hat{\tau}_1 + l_m\} \\ &= [w(\lambda)y(\lambda)]^{k-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^m}{m!} e^{-\lambda y} dW(y) \int_0^\infty V(x)e^{-\lambda x} dY(x). \end{aligned}$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_2) = k[E(W) + E(Y)] + mE(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_2) = mE(\tilde{b})$.

(2) 服务员休假回到系统, 系统中无顾客等待, 这时服务员需要留在系统, 检查服务台是否已经发生故障, 且第一个顾客的到达发生在服务台的正常期间. 若第一个顾客到达前服务台已经发生过温储备故障, 结合模型假设, 那么此时第一个顾客的到达发生在服务台的某个正常期间 Y_k ($1 \leq k < \infty$) 中, 其概率为

$$\begin{aligned} q_3(k) &= P\{V + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < V + s_k, Y \leq V\} \\ &\quad + P\{Y + s_{k-1} + W_k \leq \hat{\tau}_1 < Y + s_k, Y > V\} \\ &= w(\lambda)[1 - y(\lambda)][w(\lambda)y(\lambda)]^{k-1} \int_0^\infty V(x)Y(x)dF(x). \end{aligned}$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_3) = \frac{1}{\lambda} + E(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_3) = E(\tilde{b})$.

若第一个顾客到达前服务台没有发生温储备故障, 其概率为

$$q_4 = P\{V < \hat{\tau}_1, Y > \hat{\tau}_1\} = \int_0^\infty V(x)\bar{Y}(x)dF(x).$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_4) = \frac{1}{\lambda} + E(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_4) = E(\tilde{b})$.

(3) 顾客的到达发生在服务员假期中, 且服务员休假回到系统发现服务台已经处于温储备故障的状态. 结合模型的终止休假规则. 若服务员休假回到系统, 已有 m ($1 \leq m < N$) 个顾客在系统中等待, 同时在修理时间 W 中到达了 n ($0 \leq n < \infty$) 个顾客, 其概率为

$$\begin{aligned} q_5(m, n) &= P\{Y \leq V, \hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V < \hat{\tau}_1 + l_m, l_n \leq W < l_{n+1}\} \\ &= \int_0^\infty Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} dW(y). \end{aligned}$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_5) = E(V) + E(W) + (m+n)E(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_5) = (m+n)E(\tilde{b})$.

若在服务员的休假期间系统中的顾客数到达了 N 个, 同时在修理时间 W 中到达了 n ($0 \leq n < \infty$) 个顾客, 其概率为

$$\begin{aligned} q_6(n) &= P\{Y \leq \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, V > \hat{\tau}_1 + l_{N-1}, l_n \leq W < l_{n+1}\} \\ &= \int_0^\infty Y(x)\bar{V}(x)dF^{(N)}(x) \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} dW(y). \end{aligned}$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_6) = \frac{N}{\lambda} + E(W) + (N+n)E(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_6) = (N+n)E(\tilde{b})$.

(4) 顾客的到达发生在服务员的假期中, 且服务员休假回到系统发现服务台未发生温储备故障. 结合模型的终止休假规则. 若服务员休假回到系统, 已有 m ($1 \leq m < N$) 个顾客在系统中等待, 其概率为

$$q_7(m) = P\{\hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V < \hat{\tau}_1 + l_m, Y > V\} = \int_0^\infty \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x).$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_7) = E(V) + mE(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_7) = mE(\tilde{b})$.

若在服务员的休假期间系统中的顾客数到达了 N 个, 其概率为

$$q_8 = \sum_{m=N}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + l_{m-1} \leq V < \hat{\tau}_1 + l_m, Y > V\} = \sum_{m=N}^{\infty} \int_0^\infty \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x).$$

此时, 一个周期的期望长度为 $E(L_8) = \frac{N}{\lambda} + NE(\tilde{b})$, 一个周期内的“广义忙期”长度的期望值为 $E(B_8) = NE(\tilde{b})$.

综合上述, 得到一个更新周期的期望长度为

$$\begin{aligned} & E(L) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_1(k, m) E(L_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_2(k, m) E(L_2) + \sum_{k=1}^{\infty} q_3(k) E(L_3) + q_4 E(L_4) \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} q_5(m, n) E(L_5) + \sum_{n=0}^{\infty} q_6(n) E(L_6) + \sum_{m=1}^{N-1} q_7(m) E(L_7) + q_8 E(L_8) \\ &= \frac{1}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \left\{ \frac{1 - w(\lambda)}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} [E(W) + E(V) - w(\lambda)y(\lambda)(E(V) - E(Y))] \right. \\ &\quad \left. + \lambda E(\tilde{b}) E(W) \right\} \cdot \int_0^\infty Y(x) e^{-\lambda x} dV(x) \\ &+ \frac{1}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \left[\frac{1 - w(\lambda)}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} (E(W) + E(Y)) + \lambda E(\tilde{b}) E(W) \right] \cdot \int_0^\infty V(x) e^{-\lambda x} dY(x) \\ &+ \left[\frac{1}{\lambda} + E(\tilde{b}) \right] \cdot \left\{ \int_0^\infty V(x) \bar{Y}(x) dF(x) + \frac{w(\lambda)[1 - y(\lambda)]}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \int_0^\infty V(x) Y(x) dF(x) \right\} \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} [E(V) + E(W) + E(\tilde{b})(m + \lambda E(W))] \cdot \int_0^\infty Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) \\ &+ \left[\frac{N}{\lambda} + E(W) + E(\tilde{b})(N + \lambda E(W)) \right] \cdot \int_0^\infty Y(x) \bar{Y}(x) dF^{(N)}(x) \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} [E(V) + mE(\tilde{b})] \cdot \int_0^\infty \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) \\ &+ \sum_{m=N}^{\infty} \left[\frac{N}{\lambda} + NE(\tilde{b}) \right] \cdot \int_0^\infty \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x). \end{aligned}$$

记 $E(B)$ 表示一个更新周期内的“广义忙期”长度的期望值, 那么

$$\begin{aligned}
 E(B) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_1(k, m)E(B_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_2(k, m)E(B_2) + \sum_{k=1}^{\infty} q_3(k)E(B_3) + q_4E(B_4) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} q_5(m, n)E(B_5) + \sum_{n=0}^{\infty} q_6(n)E(B_6) + \sum_{m=1}^{N-1} q_7(m)E(B_7) + q_8E(B_8) \\
 &= E(\tilde{b}) \left\{ \frac{\lambda E(W) + w(\lambda)(1 - y(\lambda))}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \cdot \int_0^{\infty} V(x)Y(x)dF(x) + \int_0^{\infty} V(x)\bar{Y}(x)dF(x) \right. \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} [m + \lambda E(W)] \cdot \int_0^{\infty} Y(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) \\
 &\quad + [N + \lambda E(W)] \cdot \int_0^{\infty} Y(x)\bar{Y}(x)dF^{(N)}(x) \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{N-1} m \int_0^{\infty} \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) + N \sum_{m=N}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{Y}(x) \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dV(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

在一个更新周期内, 服务台在服务员“广义忙期”中发生故障时, 需要的修理费用的期望值为

$$c_z \cdot \frac{E(Z)}{E(X) + E(Z)} \cdot E(B).$$

一个更新周期内, 服务台发生温储备故障的长度的期望值为

$$\begin{aligned}
 E(L_w) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} kE(W)[q_1(k, m) + q_2(k, m)] + \sum_{k=1}^{\infty} kE(W)q_3(k) \\
 &\quad + E(W) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{N-1} q_5(m, n) + q_6(n) \right],
 \end{aligned}$$

将上面 $q_1(k, m), q_2(k, m), q_3(k), q_5(m, n), q_6(n)$ 表达式代入到上式, 整理得到

$$\begin{aligned}
 E(L_w) &= \frac{E(W)}{1 - w(\lambda)y(\lambda)} \cdot \int_0^{\infty} V(x)Y(x)dF(x) \\
 &\quad + E(W) \cdot \left[\int_0^{\infty} Y(x)F(x)dV(x) - \int_0^{\infty} \bar{Y}(x)F^{(N)}(x)dY(x) \right].
 \end{aligned}$$

在一个更新周期内, 服务台发生温储备故障需要的修理费用的期望值为

$$c_w \cdot E(L_w).$$

结合系统的模型描述及建立的费用模型, 一个更新周期内的期望费用由下面四个部分组成:

(1) 顾客在系统逗留的期望费用: $h \cdot \bar{L}_{\text{Min}(N, V)}$, 其中 $\bar{L}_{\text{Min}(N, V)}$ 的表达式见文中定理 4,

(2) 服务台在服务员“广义忙期”中发生故障需要修理的期望费用: $c_z \cdot \frac{E(Z)}{E(X)+E(Z)} \cdot E(B)$,

(3) 服务台发生温储备故障而需要修理的期望费用: $c_w \cdot E(L_w)$,

(4) 在一个周期内系统固定消耗费用: c_0 .

于是

$$C(N) = h\bar{L}_{\min(N,V)} + \frac{c_0 + c_z \frac{E(Z)}{E(X)+E(Z)} E(B) + c_w E(L_w)}{E(L)}.$$

表 1 不同控制策略 N 下系统长期运行单位时间的期望费用

N	$C(N)$								
1	137.8313	11	122.3174	21	126.5599	31	128.2114	41	129.1097
2	109.1905	12	123.0499	22	126.7846	32	128.3245	42	129.1774
3	107.9342	13	123.6687	23	126.9920	33	128.4314	43	129.2421
4	110.2174	14	124.1995	24	127.1840	34	128.5324	44	129.3040
5	112.9232	15	124.6612	25	127.3623	35	128.6280	45	129.3632
6	115.3601	16	125.0677	26	127.5282	36	128.7187	46	129.4201
7	117.3903	17	125.4294	27	127.6831	37	128.8048	47	129.4746
8	119.0360	18	125.7542	28	127.8280	38	128.8867	48	129.5269
9	120.3622	19	126.0479	29	127.9638	39	128.9046	49	129.5773
10	121.4367	20	126.3153	30	128.0914	40	129.0389	50	129.6256

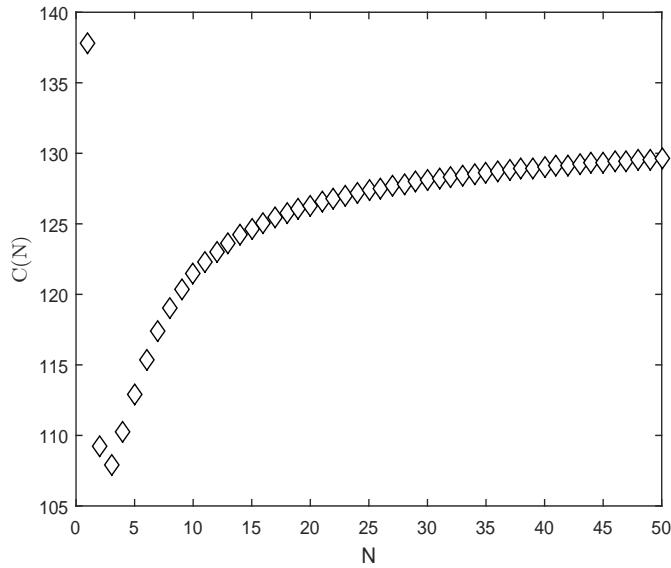


图 1 不同控制策略 N 下系统长期运行单位时间的期望费用

下面用数值计算实例来讨论使 $C(N)$ 达到最小值的最优控制策略 N^* . 对于 $t \geq 0$, 取

$$Y(t) = 1 - e^{-\gamma t}, \quad W(t) = 1 - e^{-\theta t}, \quad V(t) = 1 - e^{-vt}.$$

并取参数 $h = 20$, $c_w = 50$, $c_z = 200$, $c_0 = 500$, $\lambda = 0.6$, $\mu = 2$, $\alpha = 0.6$, $\beta_1 = 2$, $\gamma = 0.5$, $\theta = 0.4$, $v = 0.4$. 计算得到 $\tilde{\rho} = 0.66 < 1$. 图 1 和表 1 给出了在不同控制策略 N 下系统长期运行单位时间的期望费用 (保留到小数点后四位).

结合图 1 和表 1, 可得系统的最优控制阈值为 $N^* = 3$, 此时系统费用函数的最小值为 $C(N^*) = C(3) = 107.9342$.

致谢. 作者衷心地感谢审稿专家细心的阅读以及所提出的宝贵的修改意见.

参 考 文 献

- [1] Doshi B. Queueing Systems with Vacations-a Survey. *Queueing Systems*, 1986, 1(1): 29–66
- [2] 曹晋华, 程侃. 服务台可修的 $M/G/1$ 排队系统分析. *应用数学学报*, 1982, 5(2): 113–127
(Cao J H, Cheng K. Analysis of $M/G/1$ Queueing System with Repairable Service Station. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1982, 5(2): 113–127)
- [3] 唐应辉. 服务台可修的 $M/G/1$ 排队系统的进一步分析. *系统工程理论与实践*, 1996, 16(4): 45–51
(Tang Y H. Further Analysis of $M/G/1$ Queueing System with Repairable Service Station. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 1996, 16(4): 45–51)
- [4] Tang Y H, Tang X W. The Queue-Length Distribution for $M^x/G/1$ Queue with Single Server Vacation. *Acta Mathematica Scientia*, 2000, 20B(3): 397–408
- [5] 唐应辉, 赵玮. 可修排队系统可靠性指标的分解特征. *运筹学学报*, 2004, 8(4): 73–84
(Tang Y H, Zhao W. The Decomposition Properties of Reliability Indices in Repairable Queueing System. *OR Transactions*, 2004, 8(4): 73–84)
- [6] Kella O. The Threshold Policy in the $M/G/1$ Queue with Server Vacations. *Naval Research Logistics*, 1989, 36(1): 111–123
- [7] 唐应辉, 唐小我, 赵玮. 单重休假的 $M^x/G(M/G)/1$ 可修排队系统 (I)- 些排队指标. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(1): 211–215
(Tang Y H, Tang X W, Zhao W. The $M^x/G(M/G)/1$ Repairable Queueing System with Single Vacations(I): Some Queueing Indices. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2000, 20(1): 211–215)
- [8] Moreno P. Analysis of a $Geo/G/1$ Queueing System with a Generalized N -Policy and Setup-closedown Times. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2008(2): 111–128
- [9] Luo C Y, Tang Y H, Li W, Xiang K L. The Recursive Solution of Queue Length for $Geo/G/1$ Queue with N -Policy. *Journal of System Science and Complexity*, 2012, 25(2): 293–302
- [10] 魏瑛源, 唐应辉, 顾建雄. 延迟 D - 策略 $Geo/G/1$ 排队系统的队长分布及容量的优化设计. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(4): 996–1005

- (Wei Y Y, Tang Y H, Gu J X. Queue Size Distribution and Capacity Optimum Design for $Geo/G/1$ Queueing System with Delayed D -Policy. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2013, 33(4): 996–1005)
- [11] Attahiru S A, Li W. Optimal (N,T) -Policy for $M/G/1$ System with Cost Structures. *Performance Evaluation*, 2000, 42(4): 265–277
- [12] 井彩霞, 崔颖, 田乃硕. $\text{Min}(N,V)$ -策略休假的 $M/G/1$ 排队系统分析. *运筹与管理*, 2006, 15(3): 53–58
(Jing C X, Cui Y, Tian N S. Analysis of the $M/G/1$ Queueing System with $\text{Min}(N,V)$ -Policy. *Operations Research & Management Science*, 2006, 15(3): 53–58)
- [13] 唐应辉, 吴文青, 刘云颇. 基于单重休假的 $\text{Min}(N,V)$ -策略 $M/G/1$ 排队系统分析. *应用数学学报*, 2014, 37(6), 976–996
(Tang Y H, Wu W Q, Liu Y P. Analysis of $M/G/1$ Queueing System with $\text{Min}(N,V)$ -Policy based on Single Server Vacation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2014, 37(6): 976–996)
- [14] 唐应辉, 吴文青, 刘云颇, 刘晓云. 基于多重休假的 $\text{Min}(N,V)$ -策略 $M/G/1$ 排队的队长分布. *系统工程理论与实践*, 2014(6): 1533–1546
(Tang Y H, Wu W Q, Liu Y P, Liu X Y. The Queue Length Distribution of $M/G/1$ Queueing System with $\text{Min}(N,V)$ -policy based on Multiple Server Vacations. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2014(6): 1533–1546)
- [15] 兰绍军. 具有单重休假和 $\text{Min}(N,V)$ -策略控制的 $Geo/G/1$ 离散时间排队. 成都: 四川师范大学, 2014
(Lan S J. $Geo/G/1$ Discrete-time Queue under the Control of Single Server Vacation and $\text{Min}(N,V)$ -policy. Chengdu: Sichuan Normal University, 2014)
- [16] 兰绍军, 唐应辉. 具有多重休假和 $\text{Min}(N,V)$ -策略控制的 $Geo/G/1$ 离散时间排队. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(3): 799–810
(Lan S J, Tang Y H. $Geo/G/1$ Discrete-time Queue with Multiple Server Vacations and $\text{Min}(N,V)$ -Policy. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2015, 35(3): 799–810)
- [17] Tang Y H, A Single-Server $M/G/1$ Queueing System Subject to Breakdowns-some Reliability and Queueing Problems. *Micro electronics & Reliability*, 1997, 37(2): 315–321
- [18] 牟永聪. 在闲期内可能发生故障的 $M^x/G/1$ 可修排队系统分析. 成都: 四川师范大学, 2011
(Mou Y C. Analysis of $M^x/G/1$ Repairable Queueing System in which The Server Station May Fail in the Idle Periods. Chengdu: Sichuan Normal University, 2011)
- [19] 李良才, 唐应辉, 牟永聪, 余口妙. 在第二类故障期间以概率 p 进入的 $M/G/1$ 可修排队系统—一些排队指标. *数学物理学报*, 2012, 32A(6): 1149–1157
(Li C L, Tang Y H, Mou Y C, Yu M M. $M/G/1$ Repairable Queueing System with p -Entering Discipline During Second Type Failure Times: Some Queueing Indices. *Acta Mathematica Scientia*, 2012, 32A(6): 1149–1157)
- [20] 唐应辉, 牟永聪, 余口妙. 在第二类故障期间以概率 p 进入的 $M/G/1$ 可修排队系统—一些可靠性指标. *系统工程学报*, 2012, 32(6): 1149–1157
(Tang Y H, Mou Y C, Yu M M. Analysis of Reliability on $M/G/1$ Repairable Queueing System with p -Entering Discipline during Second Type Failure Times: Some Reliability Indices. *Journal of Systems*

Engineering, 2012, 32(6): 1149–1157)

- [21] 朱亚丽. 具有温储备失效特征的 N - 策略的 $M/G/1$ 可修排队系统. 成都: 四川师范大学, 2013
(Zhu Y L. $M/G/1$ Repairable Queueing System with N -Policy and Warm Standby Failure. Chengdu: Sichuan Normal University, 2013)
- [22] 唐应辉, 朱亚丽. 具有温储备失效的 $M/G/1$ 可修排队系统. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 944–950
(Tang Y H, Zhu Y L. $M/G/1$ Repairable Queueing System with Failure in Warm Standby. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2014, 34(4): 944–950)
- [23] 刘金银, 唐应辉, 朱亚丽. 具有温储备失效和延迟修理的 $M/G/1$ 可修排队系统的可靠性指标. 系统工程理论与实践, 2015, 35(2): 413–423
(Liu J Y, Tang Y H, Zhu Y L. Reliability Indices of $M/G/1$ Repairable Queueing System with Warm Standby Failure and Delayed Repair. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2015, 35(2): 413–423)
- [24] 唐应辉, 刘金银, 余口妙. N - 控制策略且温储备失效 $M/G/1$ 可修排队, 系统工程学报, 2015, 30(6): 852–864
(Tang Y H, Liu J Y, Yu M M. $M/G/1$ Repairable Queue with N -Control Policy and Warm Standby Failure. *Journal of Systems Engineering*, 2015, 30(6): 852–864)
- [25] 唐应辉, 唐小我. 排队论 - 基础与分析技术. 北京: 科学出版社, 2006
(Tang Y H, Tang X W. Queueing Theory-Foundations and Analysis Techniques. Beijing: Science Press, 2006)

**$M/G/1$ Repairable Queueing System with
Warm Standby Failure and Min(N, V)-policy
Based on Single Vacation**

CAI XIAOLI

(School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068)

TANG YINGHUI[†]

(School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068)

(School of Fundamental Education, Sichuan Normal University, Chengdu 610068)

(tangyh@sicnu.edu.cn)

Abstract This paper considers an $M/G/1$ repairable queueing system with warm standby failure and Min(N, V)-policy based on single vacation in which there are two types of breakdowns. One is that the service station may break during the “generalized busy period” of the servers, and another is warm standby failure during the period of not providing service for customers. We assume that two breakdowns are enjoyed different failure rate and repair rate. Applying the total probability decomposition technique, laplace transform and the renewal process theory, we study the transient queue distribution and the steady-state queue distribution. The recursive expression of the laplace transformation for transient queue length distribution is obtained. And, the recursive expression for the steady-state queue length distribution, which have important value in the system capacity design, is also given. Then, the stochastic decomposition property of the steady state queue length distribution is proved. Meanwhile some special cases are also discussed when the single vacation time $v=0$ or $v\rightarrow\infty$, and the warm standby life time $\gamma\rightarrow\infty$. Finally, the total long-run expected average cost per unit for system is developed, and the optimal control policy N^* is discussed by the numerical example.

Key words repairable queueing system; warm standby failure; Min(N, V)-policy; queue length; total probability decomposition technique

MR(2000) Subject Classification 62G05; 62N01

Chinese Library Classification O212.7