

# 生产状态转移对代理人问题 和公司投资的影响<sup>\*</sup>

王 莹<sup>†</sup>

(浙江大学数学科学学院, 杭州 310027)

(<sup>†</sup>E-mail: wangyingsky@126.com)

黄文礼

(浙江财经大学中国金融研究院, 杭州 310027)

杨 晨

(新加坡国立大学, 新加坡 117574)

李胜宏

(浙江大学数学科学学院, 杭州 310027)

(E-mail: shl@zju.edu.cn)

郑大厚

(浙江工商大学金融研究所, 杭州 310027)

**摘要** 在委托代理理论框架下, 本文考虑更符合实际的市场环境, 研究生产状态转换和重大损失风险两大不稳定因素对代理人贴现价值, 公司价值及投资量的影响。文章根据最优合约理论和随机控制原理, 在代理人与投资者之间建立一个动态最优合约模型, 该模型一方面对代理人具有足够的激励作用, 另一方面最大化投资者的价值函数。此外, 延缓支付, 清算风险和由生产状态转移引起的代理人报酬的补偿报酬等因素也都包含其中。文章发现: 重大事故风险对高生产状态下投资量的影响大于对低生产状态下投资量的影响。这一结果有效解释了行为经济学中当经理人面临清算时, 在市场低迷状态下往往选择奋力一搏增加投资量, 而在市场繁荣状态下的选择却更保守这一现象。其次, 当不受代理人控制的生产状态转换发生时, 代理人所得到的补偿价值对代理人具有重要的激励作用, 但随着代理人价值函数的增加, 激励作用逐渐

本文 2016 年 6 月 13 日收到, 2017 年 3 月 9 日收到修改稿。

\* 国家自然科学基金 (11171304; 71371168; 11571310) 资助项目。

<sup>†</sup> 通讯作者。

减弱。该结论打破了代理人所得报酬应只与自身的表现有关，而不应受其他外界因素的影响这一传统认知；最后，投资决策依赖于公司效益，生产状态转换和清算风险也间接影响公司的投资决策。当生产状态好转时，且贴现价值的激励作用使代理人问题得到缓解，投资也变得更加有利，投资量会增加；反之亦然。

**关键词** 代理人问题；生产状态转移；重大损失；投资决策

**MR(2000) 主题分类** 11K99

**中图分类** F224.3

## 1 引言

代理人问题作为金融市场上重要的摩擦来源，代理人的行为直接影响公司生产效率，公司规模和投资决策等方面。许多学者在稳定的市场背景下研究该类问题，如 Demarzo, Fishman, He 和 Wang<sup>[1]</sup>。而事实上市场中总存在不同程度的生产冲击，市场环境也不断发生变化。如 08 年金融危机后，经济市场也随之受到严重的冲击，许多公司因资本链断裂而减少生产规模甚至破产。因此，本文考虑存在生产状态转换和重大损失风险的不稳定市场，并在该背景下研究代理人问题对公司价值，投资决策的影响。如何激励代理人在不稳定的生产过程中竭尽全力？不受代理人控制的生产状态转移冲击如何作用于代理人问题，进而影响投资决策？本文通过建立最优合约模型回答上述问题。

代理人不可观测的行为有多种表现形式。Demarzo 和 Fishman<sup>[2]</sup> 中代理人不可观测的行为是转移公司现金流，该文章在离散时间集上研究了公司的最优资产组合问题。Demarzo 和 Sannikov<sup>[3]</sup> 在连续时间集上讨论了类似的情形问题，在代理人和投资者之间建立了一个动态最优合约。Sannikov<sup>[4]</sup> 中代理人的行为是其不可观测的努力程度影响公司的现金流，文章刻画了代理人的工资和努力程度的动态变化过程。还有一些文献，如 Bolton, Wang 和 Yang<sup>[5]</sup> 根据代理人人力资本的不可剥夺性，对代理人所得报酬添加约束条件，要求其必须大于等于从外部其他选择处得到的报酬。本文中研究的代理人不可观测的行为也是代理人的努力程度，与之前文献不同的是，它不仅影响公司的生产效率，而且影响公司重大损失发生的概率。

He<sup>[6]</sup> 在合约框架下研究了代理人问题与公司规模之间的关系，文中假设公司规模服从几何布朗运动，得出了代理人最优的激励报酬。Biais, et al.<sup>[7]</sup> 在不同的背景下研究了类似的问题，该文献假设代理人的行为导致重大事故发生，从而导致规模发生变化。与该文献不同的是，本文研究的是代理人问题与公司价值，投资决策之间的关系。Demarzo 和 Fishman<sup>[8]</sup> 在一个有限的离散时间框架下，讨论了在代理人问题的影响下，公司投资，现金流以及代理人所得报酬之间的关系。由于模型是在有限的离散时间集上建立的，作者采用倒推的方式，从最后时刻开始依次向前推导出不同时段代理人所得的报酬和公司价值。Lorenzoni 和 walentin<sup>[9]</sup>, Schmid<sup>[10]</sup> 也是在离散时间集上建立模型，讨论代理人问题与公司投资之间的关系。与此不同的是，本文是用连续时间模型刻画代理人与投资者之间的最优激励合约。

基于委托代理理论，本文在公司存在生产状态转换冲击和发生重大事故风险的背景下，假设代理人的努力程度影响平均生产率和重大事故发生概率，在连续时间集上建立投资者与代理人之间的最优激励合约模型，研究生产状态转换对代理人报酬的影响，以及代理人问题对公司价值，投资决策的影响。文中假设生产状态是二维马尔可夫过程，其发生概率和重大事故发生概率均服从泊松分布。利用随机控制理论，得出在代理人问题和生产状态转换影响下公司价值函数满足的偏微分方程组。通过该方程组可确定最优的投资决策和代理人的调整贴现价值，并讨论生产状态转移前后，代理人的报酬以及公司投资决策的变化情况。

本文所考虑的存在生产状态转换冲击和发生重大事故风险的市场环境假设，更加符合实际情况。在这一背景讨论的生产状态转换冲击与代理人问题，公司价值和投资决策的相互关系，具有很强的实践运用的价值。另外，本文在连续时间集上建模，讨论代理人问题和生产状态转移对公司价值和投资的影响，最终用满足特定边界条件的微分方程组刻画最优激励合约模型，且模型中各参数之间的关系可从方程中直接得出，方法更加科学有效。本文的模型和结论对于公司资产管理具有一定的参考价值。

本文研究发现：(1) 代理人的贴现价值与公司整体的收益正相关，虽然生产状态转移冲击与代理人无关，但代理人的贴现价值会受其影响。这与代理人所得报酬应只与自身的表现有关，而不应受其他外界因素的影响这一传统认知相悖。当生产状态转好时公司价值明显提升，代理人所得贴现价值随之公司价值的增长而增长；反之亦然。且通过模型实证分析发现，因生产状态变换而支付给代理人的调整费用，对代理人起到了很好的激励作用。(2) 公司的投资决策依赖于公司的效益。当生产状态变化时，公司投资量也会随之变化。首先，当生产状态好转时，投资变得有利可图，公司投资量随着公司收益的提高而增加；其次，当生产状态好转时，由于代理人贴现价值增加，代理人问题得到缓解，故投资也变得更加有利，投资量也会因此而增加。反之当生产状态恶化时，投资量也相应地减少；另外，除生产状态和代理人调整费用的激励作用之外，公司价值和投资决策还受到清算风险的影响。

## 2 模型的建立

模型是由风险中性的投资者和代理人组成。代理人作为有能力但没有足够资金运行公司、项目的个人，不得不向外部投资者寻求资金的支持。最终形成了投资者拥有公司，代理人管理公司的局面，这也正是代理人问题出现的根本原因。由于代理人有多种外部选择，且其人力资本具有不可剥夺性，所以其主观贴现率  $\gamma > r > 0$ ，其中  $r > 0$  是投资者的主观贴现率。

公司利用资本进行生产，设每单位资本的累积生产过程  $A_t$  满足随机微分方程

$$dA_t = a_t \mu dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中  $\sigma > 0$  是  $A_t$  的波动率， $B = \{B_t : 0 \leq t < \infty\}$  是完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的布朗运动。在生产过程中，代理人付出的努力程度  $a_t \in [0, 1]$  直接影响每单位资本的平均生

产率, 同时得到  $\lambda(1 - a_t)\mu dt$  的私人收益. 代理人在工作中努力程度越高, 即  $a_t$  值越大时, 平均生产率就越高, 但代理人所得的私人收益就越低; 反之亦然.

在实际生活中, 任何公司都存在遭受重大损失的风险, 如发生大型事故, 或所投资的资产价值大幅下降等. 假设每次事故给公司带来的损失与公司资本成比例, 即为  $K_t C$ , 其中  $C > 0$  为常数. 由于该类事故的发生概率较小, 本文用泊松过程  $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$  表征截止到时刻  $t$  事故发生的次数,  $\{T_k\}_{k \geq 1}$  表示第  $k$  次事故发生的时间,  $A_t$  表示事故发生的密度, 故在  $[t, t + dt]$  时段内, 事故发生的概率为  $A_t dt$ .

关于工业事故的系统性分析指出事故发生的主要原因为疏于管理(详见 [11-13]). 近年来由经济危机导致银行和保险公司遭受重大损失的根本原因也是风控的疏漏和不足, 因此预防重大事故的发生需要代理人的努力. 为了便于分析, 本文取  $A_t \in \{\alpha, \alpha + \Delta\alpha\}$ , 其中  $\alpha, \Delta\alpha > 0$ . 如果代理人倾尽全力 ( $a_t = 1$ ), 则事故发生的概率较小,  $A_t = \alpha$ , 否则, 损失发生的概率较大,  $A_t = \alpha + \Delta\alpha$ . 且在此过程中, 代理人可得到私人收益  $\Delta\alpha K_t b dt$ .

令  $K, I$  分别代表公司的资本和总投资率. 根据经典的资本累积模型,  $K_t$  满足方程

$$dK_t = (I_t - \delta K_t) dt, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

其中  $\delta \geq 0$  是资本折旧率.

根据经典的投资理论<sup>[10]</sup>, 投资必然会带来调整费用  $G(I, K)$ , 满足  $G(0, K) = 0$  和如下方程:

$$I + G(I, K) = c(i)K, \quad (3)$$

其中  $c(i)$  表征每单位资本以  $i = \frac{I}{K}$  的速率增长时所需要的总成本, 它是关于  $i$  的增函数. 由于全文的分析并不依赖于  $c(i)$  的具体形式, 这里令

$$c(i) = i + \frac{1}{2}\theta i^2, \quad (4)$$

其中参数  $\theta$  用来衡量调整费用.

本文假设存在一个不受代理人控制的生产状态转换冲击  $\pi_t^n$ , 可以将其理解为一个可观测到、影响生产效率的因子. 不失一般性, 设  $\pi^n \in \{\pi^h, \pi^l\}$  是一个二维的马尔可夫转换过程, 其中  $0 < \pi^l < \pi^h$  分别代表较低和较高的生产状态, 即  $n = l$  时的公司效益低于  $n = h$  时的公司效益. 记生产状态转移密度为  $\xi^n$ , 在  $[t, t + dt]$  时段内, 从状态  $n$  转换到  $m$  的概率为  $\xi^n dt$ , ( $n, m \in \{h, l\}$ ). 当生产状态变化时, 随着公司效益的变化代理人所得的贴现价值也有所调整, 记  $\Psi_{nm}$  为当生产因子状态由  $n$  转换为  $m$  时, 代理人贴现价值的调整值. 令泊松过程  $M_t$  表示截止到时刻  $t$  生产因子变化的总次数.

根据经典的 AK 模型<sup>[11]</sup>, 在  $t$  时刻公司产生的收益与资本成比例, 即为  $K_t dA_t$ . 则公司在  $t$  时刻产生的现金流为:

$$dY_t = K_t(\pi^n dA_t - c(i) dt - C dN_t). \quad (5)$$

投资者有权利随时清算公司或替换代理人, 并得到清算价值  $lK_\tau$ , 其中  $l \in [0, 1]$  是一个常数.

由于代理人问题的存在, 投资者根据公司的收益支付代理人报酬。当代理人努力程度很高, 使公司产出较高的收益, 则代理人拿到的支付金额也较多, 但此时代理人得到的私有收益较少; 反之虽然代理人收到的报酬较低, 但会得到较高的私有收益。因此, 选择何种努力程度, 对于代理人是一个重要的权衡。于是代理人与投资者之间存在一个最优的合约  $\Phi = (I, U, \tau)$ 。该合约指定了公司的投资决策  $I_t$ , 代理人的报酬  $U_t$  和合约的终止时间  $\tau$ 。该合约一方面对代理人起到激励作用, 促使其选择合适的努力程度以最大化其贴现价值; 另一方面最大化投资者的目标函数, 即公司价值。合约各项内容均基于公司的历史收益信息, 由公司收益与代理人报酬之间的关系, 合约各项内容都依赖于代理人所得的报酬。由代理人人力资本的不可剥夺性,  $U_t$  是非减的。

根据合约代理人会选择适当的努力程度  $a_t \in [0, 1]$  ( $0 \leq t \leq \tau$ ), 以最大化其价值函数  $W(\Phi)$ ,

$$W(\Phi) = \max_{a_t} E \left[ \int_0^\tau e^{-\gamma t} (dU_t + \lambda(1-a_t)\mu K_t dt + I_{\{a_t < 1\}} \Delta \alpha K_t b dt) \right]. \quad (6)$$

上式中的第二、三项是当代理人选择  $a_t < 1$  时得到的私人收益。 $E^a(\cdot)$  为概率测度  $P$  下的条件期望, 为简化记号此后均用  $E(\cdot)$  表示。由于代理人人力资本的不可剥夺性, 他得到的支付必然不小于外界的其他机会带给他的收益(本文将其简记为零), 即

$$W_t \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

而根据最优合约  $\Phi = (I, U, \tau)$ , 投资者的目的是最大化公司价值  $F(K, W, \pi)$ ,

$$F(K_0, W_0, \pi^n) = \max_{\Phi} E \left[ \int_0^\tau e^{-rt} dY_t + e^{-r\tau} l K_\tau - \int_0^\tau e^{-rt} dU_t \right]. \quad (7)$$

为了保证积分的存在性, 需满足条件

$$E \left( \int_0^\tau e^{-\gamma s} dU_s \right)^2 < \infty$$

和

$$E \left[ \int_0^T (e^{-rt} K_t)^2 dt \right] < \infty, \quad \forall T > 0.$$

### 3 模型的求解

根据最优合约需满足的两个要求, 模型求解包括三部分。首先刻画代理人贴现函数的动态变化过程, 进而求出最优合约的激励条件, 最后得出投资者的价值函数满足的微分方程。

根据最优合约  $\Phi$  截止到时刻  $t$  的历史信息, 定义代理人未来所得报酬在  $t$  时刻的贴现价值函数  $W_t(\Phi)$  为

$$W_t(\Phi) = E_t \left[ \int_t^\tau e^{-\gamma(s-t)} dU_s \right], \quad (8)$$

称为代理人  $t$  时刻的贴现价值函数. 其中  $W_{t-} = \lim_{s \uparrow t} W_s$  为  $W(\Phi)$  在  $t > 0$  时刻的左极限,  $W_t$  为确认重大损失是否发生之后代理人的贴现价值,  $W_{t-}$  是确认之前代理人的贴现价值. 根据鞅表示定理和 Ito 公式可得到  $W_t$  的动态变化过程满足如下引理.

**引理 1** 在任意时刻  $t \leq \tau$ , 代理人的贴现价值  $W_t$  满足随机微分方程

$$dW_t = \gamma W_{t-} dt - dU_t + \beta_t(dA_t - \mu dt)K_t + H_t(\alpha dt - dN_t) + \Psi_{nm}(W)(dM_t - \xi^n dt). \quad (9)$$

其中  $\beta_t, H_t$  为最优合约的激励参数, 表征了代理人的贴现函数对  $W_t$  对其努力程度的敏感度.

从上式可以看出, 若在  $t$  时刻发生重大损失, 代理人的贴现价值会减少  $H_t$ . 由代理人人力资本的不可剥夺性可得

$$W_{t-}(\Phi) \geq H_t. \quad (10)$$

根据引理 1, 对比  $a_t = 1$  和  $a_t < 1$  时代理人贴现价值的变化情况, 可得到最优合约的激励条件.

**引理 2** 最优合约保持激励作用, 即促使代理人总是选择  $a_t = 1$  的充分必要条件为:

$$a_t = 1 \iff \beta_t \geq \lambda, \quad h \geq b, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

这里  $h = \frac{H}{K}$ .

本文假设公司价值与公司资本成比例, 即

$$F(K, W, \pi^n) = Kf_n(\omega), \quad (12)$$

其中  $f_n(\omega)$  表示在  $n$  状态下每单位资本的公司价值,  $\omega = \frac{W}{K}$  表示每单位资本代理人的贴现价值. 由此可将原以  $K, W_t$  为状态变量的二元最优合约问题, 降维为以  $\omega = \frac{W}{K}$  为唯一状态变量的一元函数问题.

接下来讨论  $f_n(\omega)$  的性质. 首先, 由 (10) 和 (11) 知, 当  $\omega_t \in [0, b]$  时合约终止, 投资人每单位资本得到清算价值  $l = \frac{L}{K}$ , 即

$$f(\omega) = l, \quad \omega \in [0, b]. \quad (13)$$

其次,  $f$  是凹函数. 当代理人的单位贴现价值  $\omega$  低至清算边界时, 公司清算的风险增加. 由于公司清算效率低效, 此时投资者对代理人的不良表现较为敏感; 当  $\omega$  远离清算边界时, 清算概率降低, 投资者对代理人的不良表现反应迟缓. 这种经济现象反映了  $f$  的凹性.

最后, 投资者有权利选择一次性支付给代理人现金  $dU$  或延缓支付. 当

$$f_n(\omega) \geq f_n(\omega - dU) - dU,$$

即  $f'(\omega) \geq -1$  时, 代理人的边际支付成本不超过一次性现金支付的成本, 此时不采用一次性现金支付. 定义  $\omega^1$  为延缓支付的阈值, 满足

$$f'_n(\omega^1) = -1, \quad f''_n(\omega^1) = 0. \quad (14)$$

综上可定义,

$$dU = \max(\omega - \omega^1, 0), \quad (15)$$

即当  $\omega_t > \omega^1$  时, 代理人得到现金支付  $\omega_t - \omega_1$ , 且  $f(\omega_t) = f(\omega_1) - (\omega_t - \omega_1)$ . 当  $\omega_t \in [b, \omega^1]$  时, 代理人的报酬延缓支付,  $dU_t = 0$ .

根据 Itô 公式, 可得到当  $\omega_t \in [b, \omega^1]$  时  $f(\omega)$  满足如下 HJB 方程组:

$$\begin{aligned} rf_n(\omega) = \max_{i,h,\beta,\psi} & \left\{ \mu\pi^n - \alpha C - c(i) + f_n(\omega)(i - \delta) \right. \\ & - \omega f'_n(\omega)(i - \delta) + f'_n(\omega)(\gamma\omega + h\alpha - \psi_{nm}\xi^n) + \frac{1}{2}f''_n(\omega)\sigma^2\beta^2 \\ & \left. - \alpha(f_n(\omega) - f_n(\omega - h)) + \xi^n(f_m(\omega + \psi_{nm}) - f_n(\omega)) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $(m, n) \in \{(h, l), (l, h)\}$ ,  $\psi_{nm} = \frac{\Psi_{nm}}{K}$ ,  $i = \frac{l}{K}$ . 该 HJB 方程满足合约激励条件 (11), 边界条件 (19), (20) 和 (21). 由  $f(\omega)$  的凹性, 上式关于  $\beta, h$  单调递减, 由合约的激励条件可得,

$$\beta = \lambda, \quad (17)$$

$$h = b. \quad (18)$$

方程关于  $i$  和  $\psi_{nm}$  求导, 可得每单位资本公司的最优投资率、最优代理人调整费用如下:

$$i_n(\omega) = \frac{f_n(\omega) - \omega f'_n(\omega) - 1}{\theta}, \quad (19)$$

$$f'_n(\omega) = f'_m(\omega + \psi_{nm}(\omega)). \quad (20)$$

其中  $\omega + \psi_{nm}(\omega) \geq b$ , 否则令  $\psi_{nm}(\omega) = b - \omega$ , 终止合约. 综上分析过程, 该最优合约问题概述为以下定理:

**定理 1** 在最优激励合约模型中, 当  $\omega \in [b, \omega^1]$  时, 代理人每单位资本的贴现价值  $\omega$  满足

$$d\omega_t = (\gamma - i + \delta)\omega_t dt + \lambda\sigma dB_t - b(\alpha dt - dN_t) + \psi_{nm}(\omega)(dM_t - \xi^n dt). \quad (21)$$

投资人每单位资本价值函数满足

$$\begin{aligned} rf_n(\omega) = \max_{i,h,\beta,\psi} & \left\{ \mu\pi^n - \alpha C - c(i) + f_n(\omega)(i - \delta) \right. \\ & - \omega f'_n(\omega)(i - \delta) + f'_n(\omega)(\gamma\omega + h\alpha - \psi_{nm}\xi^n) + \frac{1}{2}f''_n(\omega)\sigma^2\beta^2 \\ & \left. - \alpha(f_n(\omega) - f_n(\omega - h)) + \xi^n(f_m(\omega + \psi_{nm}) - f_n(\omega)) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

约束条件:

$$\begin{cases} \beta = \lambda, & h = b, \\ f'_n(\omega^1) = -1, & f''_n(\omega^1) = 0, \\ f(b) = l. \end{cases} \quad (23)$$

其中  $(m, n) \in \{(h, l), (l, h)\}$ ,  $\psi_{nm} = \frac{\Psi_{nm}}{K}$ ,  $i = \frac{l}{K}$ . 当  $\omega \in [0, b]$  时, 合约终止. 投资人得到清算价值, 即  $f(\omega) = l$ . 当  $\omega \geq \omega^1$  时, 代理人收到现金支付  $\omega^1 - \omega$ , 投资人的单位价值函数  $f(\omega_t) = f(\omega_1) - (\omega_t - \omega_1)$ . 根据模型, 公司最优的单位资本投资率  $i$  和代理人的单位调整费用  $\psi_{nm}(\omega)$  满足

$$i_n(\omega) = \frac{f_n(\omega) - \omega f'(\omega) - 1}{\theta}, \quad (24)$$

$$f'_n(\omega) = f'_m(\omega + \psi_{nm}(\omega)), \quad (25)$$

其中  $\omega + \psi_{nm}(\omega) \geq b$ , 否则令  $\psi_{nm}(\omega) = b - \omega$ , 终止合约.

#### 4 数值模拟与比较分析

本部分根据最优合约模型讨论生产因子  $\pi^n$  的状态变换对公司的投资策略、代理人的贴现价值, 公司的价值的影响. 数值模拟使用的参数值如表 1 所示.

表 1 数值分析所用参数值

模型参数值					
参数	符号	数值	参数	符号	数值
投资人主观贴现率	$r$	4.6%	代理人主观贴现率	$\gamma$	5%
平均生产率	$\mu$	18%	生产过程的波动率	$\sigma$	20%
调整费用参数	$\theta$	2	资本折旧率	$\delta$	12.5%
重大损失发生的密度	$\alpha$	2%	每单位资本重大损失的成本	$C$	35%
从生产过程中得到的私人收益参数	$\lambda$	20%	由重大损失带来的私人收益参数	$b$	10%
由高至低的生产状态转移密度	$\xi^h$	0.3	由低至高的生产状态转移密度	$\xi^l$	0.167
高状态生产因子	$\pi^h$	1.1	低状态生产因子	$\pi^l$	0.9
单位资本公司的清算价值	1	70%			

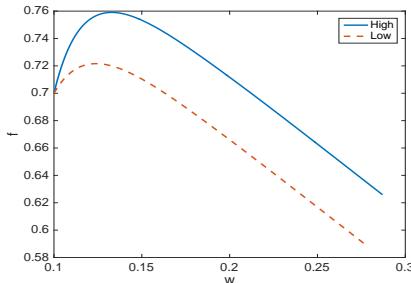


图 1 两种生产状态  $\pi_l = 0.6$ ,  $\pi_h = 1.2$  下, 公司每单位资本的价值函数  $f_n(\omega)$

首先, 讨论生产因子  $\pi^n$  对每单位资产投资者价值函数  $f(\omega)$  和代理人贴现价值  $\omega$  的影响. 在传统认知中, 代理人所得报酬只应与自身的表现有关, 而不应受其他外界因素的影响. 而本文通过模型的实证分析证明, 代理人的贴现价值与公司整体的收益相

关, 虽然生产状态转移冲击与代理人无关, 但代理人的贴现价值会受其影响. 由图 1 可以直观地看出, 当生产状态转好时公司价值明显提升,  $f_h(\omega) \geq f_l(\omega)$ , 相应地, 代理人所得贴现价值也随之提高, 有  $\psi_{lh} > 0$ ; 反之, 当公司生产状态恶化时, 公司价值随之降低, 代理人的贴现价值也随之降低, 故调整费用  $\psi_{hl} < 0$ . 究其原因在于, 当公司效益增加时, 投资者必然不希望公司被清算, 所以动态最优合约为实现其激励作用, 需提高代理人的贴现价值, 进而减小因代理人辞职而造成合约终止公司被清算的概率.

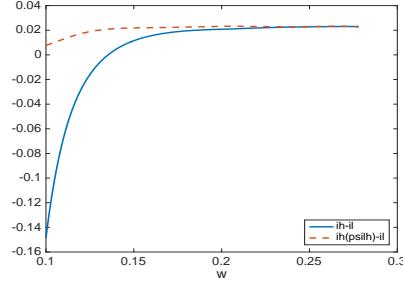


图 2 当  $\pi_l \rightarrow \pi_h$  时, 公司投资的变化量  $i_h(\psi_{lh}(\omega) + \omega) - i_l(\omega)$  和  $i_h(\omega) - i_l(\omega)$ .

接下来讨论生产因子  $\pi^n$  对公司投资量  $i(\omega)$  的影响. 图 2 刻画了当生产状态好转  $l \rightarrow h$  时, 在有无代理人补偿报酬两种情况下公司投资的变化量. 首先, 当有代理人补偿报酬时, 公司投资量增加, 即  $i_h(\psi_{lh}(\omega) + \omega) - i_l(\omega) > 0$ , 且投资增加量大于无补偿报酬的情形  $i_h(\psi_{lh}(\omega) + \omega) - i_l(\omega) > i_h(\omega) - i_l(\omega)$ . 这一结果有力地证明了代理人补偿价值的作用: 代理人补偿报酬的引进使得代理人的贴现价值  $\omega$  增加, 加大了对代理人的激励作用, 减少了代理人摩擦, 减少了投资成本, 且生产状态好转时, 投资也变得更有利可图. 其次, 两曲线间隔随  $\omega$  的减少而逐渐增加. 这是因为当  $\omega$  逐渐减少时, 代理人被清算的风险增加, 所以此时代理人的补偿报酬的激励作用逐渐增加. 而当  $\omega$  很大时, 代理人问题得到缓解, 所以该补偿报酬的激励效用减少, 间隔逐渐消失.

值得注意的是, 当  $\omega$  接近清算边界时,  $i_h(\omega) - i_l(\omega) < 0$ , 即当生产状态好转时, 投资量反而减小. 这个有趣的现象反映了代理人在面对被清算且没有调整费用的激励时, 代理人选择减小投资. 对比 Demarzo, Fishman, He 和 Wang<sup>[1]</sup> 中同情况下的投资增加的结果, 我们的结论很好的解释了重大事故风险对好状态下投资量的影响大于对坏状态下投资量的影响. 这一结果恰恰反映了行为经济学中的现象: 在市场低迷时, 迫于清算压力和对生产状态可能好转的憧憬, 代理人往往会选择奋力一搏, 增加投资量. 而在好状态下, 代理人面对清算和生产状态恶化的预期, 往往选择更保守的行为.

图 3 给出了当生产状态由高转低  $h \rightarrow l$  时, 公司投资量的相应变化情况,  $i_l(\psi_{hl}(\omega) + \omega) - i_h(\omega)$  和  $i_l(\omega) - i_h(\omega)$ . 类似于生产状态由低转高时的分析, 影响投资变化量的主要因素还是清算风险, 代理人调整费用  $\psi_{nm}$  的激励作用, 及生产状态的转换. 只是在不同的情形下, 即当  $\omega$  处于不同的大小区间时, 占主导作用的因素不同, 这里不再一一赘述.

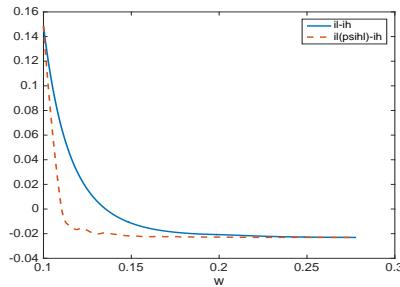


图 3 当  $\pi_h \rightarrow \pi_l$  时, 公司投资的变化量  $i_l(\psi_{hl}(\omega) + \omega) - i_h(\omega)$  和  $i_l(\omega) - i_h(\omega)$ .

## 5 结论

本文根据代理人理论, 随机控制理论, 在风险中性的投资者与代理人之间, 建立了基于生产状态转移的最优激励合约模型, 研究了在代理人问题和生产状态转移冲击下, 公司价值和公司投资决策满足的条件, 得到了公司价值满足的特定边界条件的偏微分方程组, 讨论了生产状态转移对代理人问题和投资决策的影响. 同时, 本文的研究发现: (1) 代理人的贴现价值与公司整体的收益正相关, 虽然生产状态转移冲击与代理人无关, 但代理人的贴现价值会受其影响. 这与代理人所得报酬应只与自身的表现有关, 而不应受其他外界因素的影响这一传统认知相悖. 当生产状态转好时公司价值明显提升, 代理人所得贴现价值随之公司价值的增长而增长; 反之变然. (2) 由于公司的投资决策依赖于公司的效益. 当生产状态变化时, 公司投资量随着公司效益的变化而变化. 当生产状态好转时, 投资变得有利可图, 公司投资量随着公司收益的提高而增加. 另外, 当生产状态好转时, 由于代理人贴现价值增加, 代理人问题得到缓解, 故投资也变得更加有利, 投资量也因此而增加. 反之当生产状态恶化时, 投资量也相应地减少. 除此之外, 投资还受到清算风险的影响.

从理论上来说, 本文在连续时间集上建模, 利用微分方程组刻画最优激励合约模型, 方法更加简便有效. 从实践的角度看, 首先, 本文所考虑的代理人问题, 即代理人的努力程度不仅影响平均生产率而且影响重大事故发生的概率, 更加符合实际. 其次, 本文还考虑了不受代理人控制的生产状态转换冲击, 比较符合当前的市场状况, 且讨论了该冲击对代理人问题, 公司价值和投资决策的影响, 具有很强的实际运用的价值. 本文的模型和结论对于公司资产管理具有一定的参考价值.

## 6 附录

引理 1 的证明 首先, 根据代理人的贴现价值函数  $W_t$ , 构建随机过程  $\{V_t(A_t, K), t \geq 0\}$  如下:

$$V_t = \int_0^t e^{-\gamma s} dU_s + e^{-\gamma t} W_t = E_t \left[ \int_0^\tau e^{-\gamma s} dU_s \right]. \quad (26)$$

由此定义可知,  $V_t$  是基于截止到  $t$  时刻的历史信息的某一给定的随机变量的条件期望, 所以  $V_t$  是鞅. 根据鞅的性质, 对上式运用 Itô 公式可得,

$$E_{t-}[dW_t] = \gamma W_{t-}dt - dU_{t-}. \quad (27)$$

根据文中假设, 本文存在生产过程的冲击, 重大损失的冲击, 和生产状态转换的冲击, 它们分别是利用布朗运动  $B_t$ , 泊松过程  $N_t$ ,  $M_t$  刻画. 所以  $W_t$  满足的随机微分方程可写为:

$$dW_t = \gamma W_{t-}dt - dU_t + \beta_t(dA_t - \mu dt)K_t + H_t(dN_t - \alpha dt) + \Psi_{nm}(W)(dM_t - \xi^n dt). \quad (28)$$

其中补偿泊松过程  $dN_t - \alpha dt$ ,  $dM_t - \xi^n dt$  是鞅, 期望值为零. 当最优合约具有激励性时, 有  $\sigma dB_t = dA_t - \mu dt$ , 由布朗运动的鞅性质知, 该部分的期望值也为零. 证毕.

引理 2 的证明 首先, 由代理人满足的微分方程知, 当代理人选择  $a_t < 1$  时, 代理人的贴现价值的减少量为

$$\beta_t(1 - a_t)\mu K_t dt + \Delta\alpha H_t dt, \quad (29)$$

而由此给其带来的私有收益为

$$\lambda(1 - a_t)\mu K_t dt + K_t b. \quad (30)$$

为了促使代理人不选择此种行为, 需使得由此种行为使其贴现价值的损失大于该行为带来的收益, 即

$$\lambda(1 - a_t)\mu K_t dt + \Delta\alpha K_t b dt - \beta_t(1 - a_t)\mu K_t dt - \Delta\alpha H_t dt \leq 0. \quad (31)$$

由于生产过程在时刻进行着, 代理人在该过程中的行为选择造成的影响, 从公司现金流上很快就反映出来. 与生产过程相对比, 代理人在重大损失的预防过程中的行为选择所带来的影响, 则是不易察觉的. 所以, 投资者对代理人在生产过程中的行为选择会更加敏感, 即投资者会保证, 代理人在生产过程中总是选择  $a_t = 1$ , 所以可得,

$$\lambda(1 - a_t)\mu K_t dt - \beta_t(1 - a_t)\mu K_t dt \leq 0.$$

综合上述分析可知, 最优合约  $\Phi$  保持对代理人的激励作用的条件为  $\beta_t \geq \lambda, h \geq b$ , 即

$$a_t = 1 \Leftrightarrow \beta_t \geq \lambda, \quad h \geq b, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

证毕.

定理 1 的证明 本部分只给出定理 1 的部分计算过程, 其他证明过程都在正文中体现. 固定生产状态  $n$ , 得到投资者的价值函数满足的 HJB 方程如下:

$$\begin{aligned} rF(K, W, \pi^n) &= \max_{I, dU, H, \beta, \Psi} \left\{ K(\pi^l \mu - c(i) - \alpha C) - dU \right. \\ &\quad \left. + F_K(I - \delta K) + \frac{1}{2} F_{WW} \sigma^2 \beta_t^2 K^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_W(\gamma W + \alpha H - \Psi_{nm}\xi^l) \\
& + \alpha[F(K, W, \pi^n) - F(K, W - H, \pi^n)] \\
& + \xi^n[F(K, W + \Psi_{nm}, \pi^m) - F(K, W, \pi^n)] \Big\}, \quad (33)
\end{aligned}$$

其中, 控制集  $(I, U, H, \beta, \Psi)$  满足最优合约的激励条件,  $dU = \max(\omega - \omega^1, 0)$ . 在上式中分别关于  $I, \Psi_{nm}$  求导, 可得到最优的公司投资率和代理人调整费用满足下列方程,

$$F'_n(W) = F'_m(W + \Psi_{nm}(\omega)), \quad (34)$$

由公司价值与公司资本成比例,

$$F(K, W, \pi^n) = K f_n(\omega). \quad (35)$$

利用 Itô 公式可得  $f_n(\omega)$  满足随机微分方程:

$$\begin{aligned}
rf_n(\omega) = \max_{i, h, \beta, \psi} & \left\{ \mu\pi^n - \alpha C - c(i) + f_n(\omega)(i - \delta) \right. \\
& - \omega f'_n(\omega)(i - \delta) + f'_n(\omega)(\gamma\omega + h\alpha - \psi_{nm}\xi^n) + \frac{1}{2}f''_n(\omega)\sigma^2\beta^2 \\
& \left. - \alpha(f_n(\omega) - f_n(\omega - h)) + \xi^n(f_m(\omega + \psi_{nm}) - f_n(\omega)) \right\}, \quad (36)
\end{aligned}$$

其中  $(m, n) \in \{(h, l), (l, h)\}$ . 该 HJB 方程满足合约激励条件和边界条件. 由  $f(\omega)$  的凹性, 上式关于  $\beta, h$  单调递减, 由合约的激励条件可得,

$$\beta = \lambda, \quad (37)$$

$$h = b. \quad (38)$$

方程关于  $i$  和  $\psi_{nm}$  求导, 可得每单位资本公司的最优投资率、最优代理人调整费用如下,

$$i_n(\omega) = \frac{f_n(\omega) - \omega f'(\omega) - 1}{\theta}, \quad (39)$$

$$f'_n(\omega) = f'_m(\omega + \psi_{nm}(\omega)), \quad (40)$$

其中  $\omega + \psi_{nm}(\omega) \geq b$ , 否则令  $\psi_{nm}(\omega) = b - \omega$ , 终止合约.

## 参 考 文 献

- [1] Demarzo P M, Fishman M J, He Z G, Wang N. Dynamic agency and the  $q$  theory of investment. *The Journal of Finance*, 2012, 67(6): 2295–2340
- [2] Demarzo P M, Fishman M J. Optimal long-term financial contracting. *Review of Financial Studies*, 2007, 20(6): 2079–2128
- [3] Bolton P, Wang N, Yang J Q. A theory of liquidity and risk management based on the inalienability of risky human capital. Working paper, NUS, 2014

- [4] Demarzo P M, Sannikov Y. Optimal security design and dynamic capital structure in a continuous-time agency model. *Journal of Finance*, 2006, 61(6): 2681–2724
- [5] Sannikov Y. A continuous-time version of the principal-agent problem. *Review of Economic Studies*, 2008, 75: 957–984
- [6] He Z G. Optimal executive compensation when firm size follows geometric Brownian motion. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(2): 859–892
- [7] Biais B, Mariotti T, Rochet J C, Villeneuve S. Large risks, limited liability, and dynamic moral hazard. *Econometrica*, 2010, 78(1): 73–118
- [8] Demarzo P M, Fishman M J. Agency and optimal investment dynamics. *The Review of Financial Studies*, 2007, 20(1): 151–188
- [9] Lorenzoni G, Walentin K. Financial frictions, investment and Tobin's  $q$ . *Ssrn Electronic Journal*, 2007, 33(4): 543–549
- [10] Schmid L. A quantitative dynamic agency model of financing constraints. Working paper, Duke University, 2008
- [11] Leplat J, Rasmussen J. Analysis of human errors in industrial incidents and accidents for improvements of work safety. *Accident Analysis and Prevention*, 1984, 16: 77–88
- [12] Gordon R P E, Flin R H, Means K, Fleming M T. Assessing the human factors causes of accidents in the Offshore Oil Industry. 3rd International conference on Health, Safety and Environment in Oil and Gas Exploration and Production, ed. by Ognedal M, Edwardes R J, and Visser J P. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 1996, 635–644
- [13] Hollnagel E. Understanding accidents—from root causes to performance variability. In: New Century, New trends: Proceedings of the 7th IEEE Conference on Human Factors and Power Plants, ed. by Persensky J J, Hallbert B P, and Blackman H S., New York: Intitute of Electrical and Electronics Engineers, 2002, 1–6
- [14] Hayashi F. Tobin's marginal  $q$  and average  $q$ : a neoclassical interpretation. *Econometrica*, 1982, 50(1): 213–224
- [15] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 1985, 53(2): 363–384

## The Interaction of the Productivity Shocks with the Agency Problem and Investment of the Company

WANG YING

(School of Mathematical Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(E-mail: Wangyingsky@126.com)

HUANG WENLI

(China Academy of Financial Research, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018)

---

YANG CHEN

(*Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 117574*)

LI SHENGHONG

(*School of Mathematical Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027*)

ZHENG DAHOU

(*Academy of Financial Research, Zhejiang Industry and Commerce University, Hangzhou 310027*)

**Abstract** This paper sets a more realistic marketing context which contains productivity shocks and large losses shocks to explore the influences that the two shocks played on the agency problem, the firm's value and investment. By adopting the principal-agent theory and stochastic control principle, we build an optimal dynamic contract model between the investors and the agent which is depicted by an partial differential equation (PDE). The contract is incentive-compatible to the agent and maximizes the investors' value function. Deferred compensation, possible termination, and adjustment of agent's compensation are also included. Lots interesting results are found. The influences that the large losses played the investment in high production state are more serious than in low production state. This finding is coincidence with the phenomenons in the behavioral economics that when the agent faces inefficiency termination, he will work more aggressively in the sluggish market than in the booming one. Second, when the productivity shocks happen, the adjustment compensation imposes great incentive function on the agent. This conclusion breaks the traditional opinion that the agent's scaled compensation should only related to his own performance. However the effects fade away as the agency's compensation increasing. Lastly, firm's investment decision has an positive correlation with firm's profits, and it also influenced by the productivity state shift and the termination risk indirectly. When the productivity state turns better, investment becomes more profitable, and the agency problem relaxed for the adjustment compensation, both of them make the investment increasing.

**Key words** agency problem; investment decision; productivity shocks; large losses

**MR(2000) Subject Classification** 11K99

**Chinese Library Classification** F224.3