某些一阶双曲方程组的初边值问题 *

杨丕文

(四川师范大学数学系，成都 610066)

(E-mail: ypwen1@sina.com)

李曼荔

(电子科技大学应用数学学院，成都 610054)

陈　颖

(武汉大学电子信息学院空间物理系，武汉 430079)

摘　要　本文利用函数论的方法，讨论了 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$ 空间中的一阶双曲型方程组的初边值问题，在不同情况下，分别获得了可解条件和解的表示.

关键词　拟四元数空间；双曲型方程；初边值问题

MR(2000) 主题分类　30G35; 35L45

中图分类　O175.27

1　引言

记二阶矩阵

$$e_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad e_3=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix},$$

则有 $e_1^2=e_2^2=e_3^2=e_0$，$e_1e_2=-e_2e_1=-ie_3$，$e_2e_3=-e_3e_2=-ie_1$，$e_3e_1=-e_1e_3=-ie_2$.

称以 e_0,e_1,e_2,e_3 为基元生成的实线性空间 $Q=\{q=te_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3|t,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ 为拟四元数空间. 若 $q\in Q$, 记 $|q|=(|t|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2)^{\frac{1}{2}}$. 将 $\mathbb{R}^4$ 中的元简记为 (t,x), 其中 $x=(x_1,x_2,x_3)$. 称 $f:\mathbb{R}^4\to Q$, $f(t,x)=f_0(t,x)e_0+f_1(t,x)e_1+f_2(t,x)e_2+f_3(t,x)e_3$ 为拟四元数函数，记 $\omega(t,x)=\sum\limits_{i=1}^{3}f_i(t,x)e_i$, 并称其为向量函数.

引入一阶微分算子

$$D=\frac{\partial}{\partial t}e_0+\frac{\partial}{\partial x_1}e_1+\frac{\partial}{\partial x_2}e_2+\frac{\partial}{\partial x_3}e_3=\frac{\partial}{\partial t}e_0+\nabla,$$
$$\overline{D}=\frac{\partial}{\partial t}e_0-\frac{\partial}{\partial x_1}e_1-\frac{\partial}{\partial x_2}e_2-\frac{\partial}{\partial x_3}e_3=\frac{\partial}{\partial t}e_0-\nabla.$$

本文 2007 年 1 月 12 日收到. 2008 年 1 月 10 日收到修改稿.
*四川省应用基础基金项目 (06F13-156), 四川教育厅重点项目基金 (07ZA096) 资助项目.

显然
$$D\overline{D}=\overline{D}D=\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big)e_0=\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle_3\Big)e_0.$$
∇ 和 $\triangle_3$ 分别三维梯度算子和 Laplace 算子.

我们考虑方程
$$Df=\Big(\frac{\partial}{\partial t}e_0+\nabla\Big)(f_0e_0+\omega)=g=g_0e_0+\Phi_1+i\Phi_2. \tag{1}$$
此处 $g_0(t,x)$ 是实值函数，而 $\Phi_1(t,x)$ 和 $\Phi_2(t,x)$ 是向量函数， $g_0,\Phi_1,\Phi_2\in C^1$.

方程 (1) 等价于下列方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}f_0+\nabla\cdot\omega=g_0,\\ \nabla f_0+\dfrac{\partial}{\partial t}\omega=\Phi_1,\\ \nabla\times\omega=-\Phi_2.\end{cases} \tag{2}$$
方程组 (2) 在物理学中有某些重要应用 [1−3].

从 $\overline{D}Df=\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle_3\big)f=\overline{D}g$ 可推出方程 (1) 的相容性条件：
$$\nabla\cdot\Phi_2-\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2+\nabla\times\Phi_1\Big)=0,$$
即
$$\begin{cases}\nabla\cdot\Phi_2=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_2+\nabla\times\Phi_1=0.\end{cases} \tag{3}$$
以下设方程 (1) 满足条件 (3).

设 Ω 是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个锥形区域， $\Omega=\big\{(t,x)|0<t<1$ 且 $|x|<1-t\big\}$. 而记 $B_3=\big\{(0,x)||x|<1\big\}$, $\Gamma=\big\{(0,0,x_2,x_3)|x_2^2+x_3^2=1\big\}$.

考察 Ω 上方程 (1) 的如下初边值问题.

问题 A 求方程 (1) 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续解 $f(t,x)$, 使其满足如下初始条件与边界条件
$$f_0(0,x)=\tau_1(x),\frac{\partial}{\partial t}f_0(0,x)=\tau_2(x), \tag{4}$$
$$f_1(0,x)|_{x\in\partial B_3}=\tau_3(x), \tag{5}$$
$$\mathrm{Re}\,(x_2'e_0+ix_3'e_1)^\kappa\big[f_2(0,0,x_2',x_3')e_0+if_3(0,0,x_2',x_3')e_1\big]=r(x_2',x_3')e_0,(x_2',x_3')\in\Gamma. \tag{6}$$
这里 $\tau_1(x)\in C^3(\overline{B_3})$, $\tau_2(x)\in C^2(\overline{B_3})$, $\tau_3(x)\in C(\partial B_3)$, $r(x_2{}',x_3^{'})\in C_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$. κ 是一个整数，称为 问题 **A** 的指标.

显然，条件 (6) 等价于
$$\mathrm{Re}\,(x_2'+ix_3')^\kappa[f_2(0,0,x_2',x_3')+if_3(0,0,x_2',x_3')]=r(x_2',x_3'),(x_2',x_3')\in\Gamma. \tag{7}$$

本文利用复分析中处理一阶椭圆型方程的边值问题的方法，提出了上面 $\mathbb{R}^4$ 中的一阶双曲方程组的初边值问题及在第 4 节中的 R^3 中的一阶双曲方程组的初边值问题. 对不同情况，分别得到了问题的可解条件和解的表示.

2 关于方程 $\nabla\Psi = h$ 的广义解及 $\nabla\Psi = 0$ 的边值问题

为讨论 问题 **A** 的需要，在本节中我们考虑方程

$$\nabla\Psi = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}e_3\Big)\big(\psi_1(x)e_1 + \psi_2(x)e_2 + \psi_3(x)e_3\big) = h(x) = h_0 e_0 + i\Phi(x), \quad (8)$$

$\Phi(x)$ 是一向量函数，满足可解条件 $\nabla\cdot\Phi = 0$.

设 G 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个由分片光滑曲面 S 所围成的有界区域.

定理 1 (Pompeiu 公式) 若向量函数 $\Psi(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$,$x\in G$, 则

$$\Psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_S \Big(\nabla_x \frac{1}{r(\zeta,x)}\Big)\alpha\Psi\,\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\int_D \Big(\nabla_\zeta \frac{1}{r(\zeta,x)}\Big)\nabla_\zeta\Psi\,\mathrm{d}V. \quad (9)$$

这里的 α 是曲面 S 的单位外法方向.

证 由 Stokes 公式，对 $\overline{G}$ 上的任意向量函数 $\Phi(x)$, $\Psi(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$, 有

$$\int_G \big[(\Phi\nabla)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)\big]\,\mathrm{d}V = \int_G \Big(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi e_i\Psi\Big)\mathrm{d}V = \int_S \Phi\alpha\Psi\,\mathrm{d}S. \quad (10)$$

令 $\Phi(x) = \nabla_x\frac{1}{r(\zeta,x)}$, $r(\zeta,x) = |\zeta - x| = \big[(\zeta_1-x_1)^2 + (\zeta_2-x_2)^2 + (\zeta_3-x_3)^2\big]^{\frac12}$. $G_\varepsilon = \{\zeta||\zeta - x| < \varepsilon\}$, ε 是充分小的正数，使 $\overline{G_\varepsilon}\subset G$.

由 $\nabla_x\nabla_\zeta = -\triangle_3 e_0$ 及当 $\zeta\neq x$ 时， $\triangle_3\frac{1}{r} = 0$, 由 (10) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{G\setminus\overline{G_\varepsilon}} \Big(\nabla_x\frac{1}{r(\zeta,x)}\Big)\nabla_\zeta\Psi\,\mathrm{d}V_\zeta\\ =&\int_S \Big(\nabla_x\frac{1}{r(\zeta,x)}\Big)\alpha\Psi\,\mathrm{d}S - \int_{r(\zeta,x)=\varepsilon}\Big(\nabla_x\frac{1}{r(\zeta,x)}\Big)\alpha\Psi\,\mathrm{d}S\\ =&I_S - I_\varepsilon.\end{aligned} \quad (11)$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0} I_\varepsilon =& \lim_{\varepsilon\to0}\int_{r(\zeta,x)=\varepsilon}\frac{(\zeta_1-x_1)e_1 + (\zeta_2-x_2)e_2 + (\zeta_3-x_3)e_3}{r^3}\\ &\cdot\frac{(\zeta_1-x_1)e_1 + (\zeta_2-x_2)e_2 + (\zeta_3-x_3)e_3}{r}\Psi(\zeta)\,\mathrm{d}S\\ =&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{r(\zeta,x)=\varepsilon}\frac{\Psi(\zeta)}{r^2}\,\mathrm{d}S = 4\pi\Psi(x).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$, 由 (11) 式即得 (9) 式成立.

设 $h(x) = h_0(x)e_0 + i\Phi(x)$, $h_0(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别是定义在 G 上的实值函数与向量函数， $h(x)\in L_1(G)$, $\Phi(x)$ 满足条件:

$$\int_G \Big(\nabla_\zeta\frac{1}{r(x,\zeta)}\Big)\cdot\Phi(\zeta)\,\mathrm{d}V_\zeta = 0. \quad (12)$$

记

$$T_3 h = -\frac{1}{4\pi}\int_G \Big(\nabla_\zeta\frac{1}{r(x,\zeta)}\Big)h(\zeta)\,\mathrm{d}V_\zeta.$$

T_3h 是一向量函数.

若向量函数 $\Phi(x)\in C_0^1(G)$, $\nabla\cdot\Phi=0$, 则 $\Phi(x)$ 满足条件 (12). 事实上由 Stokes 公式可推出 $\int_G(\nabla_\zeta\frac{1}{r(x,\zeta)})\cdot\Phi(\zeta)\,\mathrm{d}V=0$. 即在分布意义下, $\nabla\cdot\Phi=0$ 与条件 (12) 是等价的.

类似于 [4] 的方法，可得如下结果：

定理 2 若 $h\in L_1(G)$, 则 T_3h 是方程 (8) 的一个广义解，即在分布意义下，

$$\nabla(T_3h)=h.$$

类似于 [4] 和 [5], 可以证明：

定理 3 若 $h\in L_P(G)$, $P>3$, 则

$$|T_3h|\le M_1(P,G)L_P(h,\overline{G}),\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^3,$$
$$\big|T_3h(x')-T_3h(x'')\big|\le M_2(p)L_P(h,\overline{G})|\,x'-x''|^\alpha,\qquad \alpha=\frac{P-3}{P},\qquad \forall\, x',x''\in\mathbb{R}^3.$$

这里 $M_1(P,G)$, $M_2(P)$ 分别表示仅依赖于 P,G 和 P 的正实常数.

下面我们讨论 B_3 上的齐次方程 $\nabla\Psi=0$ 的如下边值问题：

问题 RH 求方程 $\nabla\Psi=0$ 在 B_3 内的解 $\Psi=\psi_1e_1+\psi_2e_2+\psi_3e_3$, 使 $\Psi\in C(\overline{B})$ 且满足下列边界条件

$$\psi_1(x)|_{\partial B_3}=\tau(x),$$
$$\operatorname{Re}(x_2'e_0+ix_3e_1)^\kappa\big[\psi_2(0,x_2',x_3')e_0+i\psi_3(0,x_2',x_3')e_1\big]=(x_2',x_3')e_0,(x_2',x_3')\in\Gamma.$$

这里 $\tau(x)$ 和 $r(x_2',x_3')$ 是分别定义在 ∂B_3 和 Γ 上的实值函数，$\tau(x)\in C(\partial B_3)$, $r(x_2',x_3')\in C_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, 指标 κ 是一整数.

我们也将 $\mathbb{R}^3$ 记为 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, 而 $\mathbb{R}^3$ 中的元 $x=(x_1,x_2,x_3)$, 也记为 $x=(x_1,z)$, $z=x_2+ix_3$.

方程 $\nabla\Psi=0$ 等价于下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2e_0+i\psi_3e_1)=\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_2}e_0+i\dfrac{\partial}{\partial x_3}e_1\Big)\psi_1\\[2mm] \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_2}e_0-i\dfrac{\partial}{\partial x_3}e_1\Big)(\psi_2e_0+i\psi_3e_1)=-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1e_0.\end{cases}\tag{13}$$

利用 [6] 及 [7] 中的结果，可证如下引理.

引理 若 $g_1(x_1,z),g_2(x_1,z)$ 是定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ 空间中单位球 $B_3=\big\{(x_1,z)\mid x_1^2+|z|^2<1\big\}$ 内的复值函数， $g_1(x_1,z),g_2(x_1,z)\in C^1(B_3)$ 且满足条件 $\frac{\partial}{\partial x_1}g_2(x_1,z)=\frac{\partial}{\partial z}g_1(x_1,z)$, 那么关于复值函数 $u(x_1,z)$ 的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_1}u=g_1,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}u=g_2\end{cases}\tag{14}$$

的 **Riemann-Hilbert 边值问题**, 即求方程组 (14) 在 B_3 内的连续解 $u(x_1,z)$, 使其满足边界条件

$$\operatorname{Re}\xi^\kappa u(0,\xi)=r(\xi),\qquad \xi\in\Gamma=\{|\xi|=1\}.$$

这里 $r(\xi)\in C_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, κ 是整数，

(1) 当指标 $\kappa \geq 0$ 时问题有解

$$u(x_1,z)=\int_0^{x_1} g_1(\xi,z)\,\mathrm{d}\xi+\overline{T}g_2(0,\zeta)+u_0(z),$$

其中

$$\overline{T}g_2(0,\zeta)=-\frac{1}{\pi}\int_{B_2=\{|\zeta|<1\}}\frac{g_2(0,\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\,\mathrm{d}V_\zeta,$$
$$u_0(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\frac{\overline{z}^{2\kappa+1}\overline{g_2(0,\zeta)}}{1-\zeta\overline{z}}\,\mathrm{d}V_\zeta+\frac{\overline{z}^{\kappa}}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})(\xi+\overline{z})}{\xi-\overline{z}}\frac{d\xi}{\xi}+\sum_{m=0}^{2\kappa}c_m\overline{z}^m.$$

c_m 是任意复常数，满足关系

$$c_{2\kappa-m}+\overline{c_m}=0,\qquad m=0,\cdots,\kappa.$$

(2) 当 $\kappa<0$, 问题可解当且仅当 $r(\xi)$ 满足条件

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi}\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\overline{\zeta}^{-\kappa-1}g_2(0,\zeta)\,\mathrm{d}V_\zeta\Big]=0,\\&\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi^{m+1}}\,\mathrm{d}\xi\\&-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\big[\overline{\zeta}^{-\kappa-m-1}g_2(0,\zeta)+\zeta^{-\kappa+m-1}\overline{g_2(0,\zeta)}\big]\,\mathrm{d}V_\zeta=0,\qquad m=1,\cdots,-\kappa-1.\end{aligned}\tag{15}$$

当这些条件满足时，问题的解有下列表示

$$\begin{aligned}u(x_1,z)=&\int_0^{x_1}g_1(\xi,z)\,\mathrm{d}\xi+\overline{T}g_2(0,\zeta)-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\frac{\overline{\zeta}^{-2\kappa-1}\overline{g_2(0,\zeta)}}{1-\zeta\overline{z}}\,\mathrm{d}V_\zeta\\&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi^{-\kappa}(\xi-\overline{z})}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{16}$$

定理 4 (1) 当 $\kappa\geq 0$ 时， 问题 **RH** 有解

$$\Psi(x)=\psi_1e_1+(\psi_2e_0+i\psi_3e_1)e_2,$$

其中

$$\psi_1(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_3}\frac{1-|x|^2}{|\eta-x|^3}\tau(\eta)\,\mathrm{d}S_\eta,\tag{17}$$
$$\begin{aligned}\psi_2e_0+i\psi_3e_1=&\int_0^{x_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}e_0+i\frac{\partial}{\partial x_3}e_1\Big)\psi_1(\xi,z)\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2}\overline{T_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\frac{(x_2e_0-ix_3e_1)^{2\kappa+1}(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,x_2'+ix_3'))}{e_0-(x_2'e_0+ix_3'e_1)(x_2e_0-ix_3e_1)}\,\mathrm{d}V\\&+\frac{(x_2e_0-ix_3e_1)^{\kappa}}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r(x_2'-ix_3')(x_2'e_0+ix_3'e_1+x_2e_0-ix_3e_1)}{[(x_2'e_0+ix_3'e_1)-(x_2e_0-ix_3e_1)](x_2'e_0+ix_3'e_1)}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

$$+\sum_{m=0}^{2\kappa}c_m(x_2e_0-ix_3e_1)^m. \tag{18}$$

这里

$$\begin{aligned}\overline{T_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)&=-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)}{(x_2'e_0-ix_3'e_1)-(x_2e_0-ix_3e_1)}\,\mathrm{d}V\\&=\begin{pmatrix}\overline{T}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big) & 0\\ 0 & T\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

c_m 是满足条件 $c_{2\kappa-m}+\overline{c_m}=0,\ m=0,\cdots,\kappa$ 的任意复常数.

(2) 当 $\kappa<0$, **问题 RH** 可解当且仅当 $r(\zeta)$ 满足条件

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi}\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\overline{\zeta}^{-\kappa-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_1(0,\zeta)\Big)\,\mathrm{d}V\Big]=0,\\&\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi^{m+1}}d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\Big[\overline{\zeta}^{-\kappa-m-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)+\zeta^{-\kappa+m-1}\overline{\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)}\Big]\,\mathrm{d}V\\=&\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\overline{\xi})}{\xi^{m+1}}\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}(\overline{\zeta}^{-\kappa-m-1}+\zeta^{-\kappa+m-1})\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)\,\mathrm{d}V\\=&0,\qquad m=1,\cdots,-\kappa-1.\end{aligned} \tag{19}$$

当这些条件满足时，其解

$$\Psi(x)=\psi_1e_1+(\psi_2e_0+i\psi_3e_1)e_2,$$

其中的 $\psi_1(x)$ 如 (17) 所示,

$$\begin{aligned}\psi_2e_0+i\psi_3e_1=&\int_0^{x_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}e_0+i\frac{\partial}{\partial x_3}e_1\Big)\psi_1(\xi,z)\,\mathrm{d}\xi\\&-\frac{1}{2}\overline{T_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,\zeta)\Big)+\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\frac{(x_2'e_0-ix_3'e_1)^{-2\kappa-1}(\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(0,x_2'+ix_3'))}{e_0-(x_2'e_0+ix_3'e_1)(x_2e_0-ix_3e_1)}\,\mathrm{d}V\\&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(x_2'-ix_3')}{(x_2'e_0+ix_3'e_1)^{-\kappa}[(x_2'e_0+ix_3'e_1)-(x_2e_0-ix_3e_1)]}\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned} \tag{20}$$

证 (17) 式右端即 $\mathbb{R}^3$ 中单位球 B_3 的 Poisson 积分公式，故 $\psi_1(x,z)$ 在 B_3 内调和，在 $\overline{B_3}$ 中连续且满足 Dirichlet 边界条件 $\psi_1|_{\partial B_3}=\tau(x)$. 令 $g_1=\big(\frac{\partial}{\partial x_2}e_0+i\frac{\partial}{\partial x_3}e_1\big)\psi_1$, $g_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1e_0$, 则方程组 (14) 的相容性条件满足，从而利用引理即可得证.

3 方程 $Df=g$ 的问题 A

将方程 (1) 改写为关于向量函数 ω 的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\omega=-\nabla f_0+\Phi_1=h_1,\\ \nabla\omega=\Big(-\dfrac{\partial}{\partial t}f_0+g_0\Big)e_0+i\Phi_2=h_2.\end{cases} \tag{21}$$

由方程组 (21) 的相容性条件 $\nabla h_1 = \frac{\partial}{\partial t}h_2$ 及条件 (3) 中的第二个等式，可推出 f_0 满足如下方程

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle_3\Big)f_0 = -\nabla\cdot\Phi_1 + \frac{\partial}{\partial t}g_0 = F. \tag{22}$$

注意到条件 (3) 中的第一个等式，从而有 $\nabla T_3 h_2 = h_2$. 容易验证方程组 (21) 有通解

$$\omega(t,x) = \int_0^t h_1(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi + T_3h_2(0,\zeta) + \Psi(x). \tag{23}$$

此处 $\Psi(x)$ 是满足方程 $\nabla\Psi = 0$ 的任一向量函数.

对二阶双曲型方程 (22) 的满足初始条件 $f_0(0,x)=\tau_1$，$\frac{\partial}{\partial t}f_0(0,x)=\tau_2(x)$ 的 Cauchy 问题有唯一解，其解可如下表示：

$$f_0(t,x) = \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\int_{|\zeta-x|=t}\tau_1(\zeta)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{t}\int_{|\zeta-x|=t}\tau_2(\zeta)\,\mathrm{d}S + \int_{r=|\zeta-x|\le t}\frac{F(t-r,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}V\Big]. \tag{24}$$

对任一向量函数，用 $[]_i$ $(i=1,2,3)$ 表示它的第 i 个分量函数，即若 $\Phi = \varphi_1e_1 + \varphi_2e_2 + \varphi_3e_3$, 则 $[\Phi]_i = \varphi_i$，$i=1,2,3$.

记

$$\begin{aligned}
&\tau_3' = \tau_3(x) - [T_3h_2]_1,\\
&r'(x_2',x_3')e_0 = r(x_2',x_3')e_0\\
&\qquad\qquad - \operatorname{Re}(x_2'e_0 + ix_3'e_1)^\kappa\big\{[T_3h_2(0,0,x_2',x_3')]_2e_0 + i[T_3h_2(0,0,x_2',x_3')]_3e_1\big\}.
\end{aligned}$$

要使 $f = f_0e_0 + \omega$ 是问题 A 的解，当且仅当 (23) 式中的 $\Psi(x)$ 满足边界条件

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x)|_{\partial B_3} = \tau_3'(x),\\
&\operatorname{Re}(x_2'e_0 + ix_3'e_1)^\kappa[\psi_2(0,0,x_2',x_3')e_0 + i\psi_3(0,0,x_2',x_3')e_1]\\
=&r'(x_2',x_3')e_0, (x_2',x_3')\in\Gamma.
\end{aligned}$$

利用定理 4, 即可获得如下结果：

定理 5 (1) 当 $\kappa\ge 0$ 时，方程 (1) 的 **问题 A** 有解 $f(t,x) = f_0e_0 + \omega$, 其中 $f_0(t,x)$ 由 (24) 表示， ω 如 (23) 所表示，而其 Ψ 由 (17) 和 (18) 表示，只需分别用 $\tau_3'(\eta)$ 代替 (17) 式中的 $\tau(\eta)$ 和用 $r'(x_2',x_3')$ 代替 (18) 式中的 $r(x_2',x_3')$.

(2) 当 $\kappa<0$ 时，问题可解当且仅当 $r'(x_2',x_3')$ 满足条件 (15). 当此条件满足时，解 $f(t,x) = f_0e_0 + \omega$ 中 f_0 同 (24) 式，而 ω 如 (23) 所表示，而其 Ψ 由 (17) 和 (20) 表示，只需分别用 $\tau_3'(\eta)$ 代替 (17) 式中的 $\tau(\eta)$ 和用 $r'(x_2',x_3')$ 代替 (20) 式中的 $r(x_2',x_3')$.

4 $\mathbb{R}^3$ 中一阶双曲方程组的初边值问题

在本节中，我们讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的一阶双曲方程组的初边值问题，对 $\mathbb{R}^3$ 中的元 (t,x,y), 我们也将其记为 $(t,z) = (t, x+iy)$. 记

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

则有 $e_1^2=e_0,\ e_2^2=e_3^2=-e_0,\ e_1e_2=-e_2e_1=ie_3,\ \ e_2e_3=-e_3e_2=-ie_1,\ \ e_3e_1=-e_1e_3=ie_2$. 三维实向量

$$u=te_1+xe_2+ye_3=\begin{pmatrix} t & \overline{z} \\ -z & -t \end{pmatrix}, \qquad u^2=(t^2-x^2-y^2)e_0.$$

令

$$\partial=\frac{\partial}{\partial t}e_1+\frac{\partial}{\partial x}e_2+\frac{\partial}{\partial y}e_3.$$

则

$$\partial^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle_2\right)e_0.$$

此处

$$\triangle_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

考虑如下方程

$$\begin{aligned}\partial\Psi(t,x,y)=&\Big(\frac{\partial}{\partial t}e_1+\frac{\partial}{\partial x}e_2+\frac{\partial}{\partial y}e_3\Big)(\psi_1e_1+\psi_2e_2+\psi_3e_3)\\ =&\varphi_0e_0+i\Phi=\varphi_0e_0+i(\varphi_1e_1+\varphi_2e_2+\varphi_3e_3),\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\varphi_i\in C^1,\ i=0,1,2,3.$

方程 (25) 相应于下列实方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\psi_1-\frac{\partial}{\partial x}\psi_2-\frac{\partial}{\partial y}\psi_3=\varphi_0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\psi_3-\frac{\partial}{\partial y}\psi_2=-\varphi_1,\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\psi_1-\frac{\partial}{\partial t}\psi_3=\varphi_2,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\psi_2-\frac{\partial}{\partial x}\psi_1=\varphi_3.\end{cases}\tag{26}$$

从 $\partial^2\Psi=\partial(\varphi_0e_0+i\Phi)$, 可推出方程 (25) 的相容性条件:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1-\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2-\frac{\partial}{\partial y}\varphi_3=0.\tag{27}$$

设 $\Omega=\big\{(t,z)\mid |z|<1-t,\ 0<t<1\big\}$, 即 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中底面是 $t=0$ 平面上单位圆盘 B_2, 顶点是 $(1,0,0)$ 的圆锥. 考察 Ω 上方程 (25) 的如下初边值问题:

问题 B 求方程 (25) 在 Ω 内的解 $\Psi(t,z)$, 使 $\Psi\in C(\overline{\Omega}),\ \psi_1(0,z)=\tau_1(z),\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(0,z)=\tau_2(z)$,

$$Re(x'e_0-iy'e_1)^{\kappa}[\psi_2(0,x',y')e_0-i\psi_3(0,x',y')e_1]=r(x',y')e_0,(x',y')\in\Gamma.$$

这里 $\tau_1(z)\in C^3(\overline{B_2}),\ \ \tau_2(z)\in C^2(\overline{B_2}),\ \ r(x',y')\in C_\alpha(\Gamma),\ \ 0<\alpha<1,\ \ \kappa$ 是一个整数.

将方程 (25) 化为如下形式

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial}{\partial x}e_0 + i\dfrac{\partial}{\partial y}e_1\Big)(\psi_2 e_0 - i\psi_3 e_1) = \dfrac{\partial}{\partial t}\psi_1 e_0 - \varphi_0 e_0 + i\varphi_1 e_1 = h_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\psi_2 e_0 - i\psi_3 e_1) = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x}e_0 - i\dfrac{\partial}{\partial y}e_1\Big)\psi_1 + \varphi_3 e_0 + i\varphi_2 e_1 = h_2. \end{cases} \tag{28}$$

上式中 h_1, h_2 均为二阶对角矩阵函数，方程组 (28) 可解当且仅当 ψ_1 是下列二阶双曲型方程的解

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\psi_1 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_0 + \frac{\partial}{\partial x}\varphi_3 - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_2 = g. \tag{29}$$

当 ψ_1 满足此方程时，方程 (28) 有通解

$$\psi_2 e_0 - i\psi_3 e_1 = \int_0^t h_2(\xi, z)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}Th_1(0,\zeta) + F(z). \tag{30}$$

其中

$$Th_1(0,\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\frac{h_1(0,x',y')}{(x'-x)e_0 + i(y'-y)e_1}\,\mathrm{d}V,$$

$F(z)$ 为二阶对角矩阵函数，满足方程

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}e_0 + i\frac{\partial}{\partial y}e_1\Big)F(z) = 0.$$

对 Ω 上满足初始条件 $\psi_1(0,z) = \tau_1(z)$，$\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(0,z) = \tau_2(z)$ 的方程 (29) 的 Cauchy 问题有唯一的解

$$\begin{aligned}\psi_1(t,z) =& \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\zeta - z|\le t}\frac{\tau_1(\zeta)}{\sqrt{t^2 - |\zeta - z|^2}}\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_{|\zeta - z|\le t}\frac{\tau_2(\zeta)}{\sqrt{t^2 - |\zeta - z|^2}}\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_0^t d\xi\int_{|\zeta - z|\le \xi}\frac{g(t-\xi,\zeta)}{\sqrt{\xi^2 - |\zeta - z|^2}}\,\mathrm{d}V\Big].\end{aligned} \tag{31}$$

利用广义解析函数中的结果 [4,9], 类似于前一节的讨论，即可获得以下结果.

定理 6　(1)　若指标 $\kappa \ge 0$, **问题 B**　有解 $\Psi(t,z) = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3 = \psi_1 e_1 + (\psi_2 e_0 - i\psi_3 e_1)e_2$, 其中 ψ_1 由 (31) 所表示，而 $\psi_2 e_0 - \psi_3 e_1$, 由 (30) 表示，其中

$$\begin{aligned} F(z) =& -\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\frac{(xe_0 + iye_1)^{2\kappa+1}\overline{h_1(0,x',y')}}{e_0 - (x'e_0 - iy'e_1)(xe_0 + iye_1)}\,\mathrm{d}V \\ &+ \frac{(xe_0 + iye_1)^{\kappa}}{2\pi i}\int_\Gamma r(x',y')\frac{(x'+x)e_0 + i(y'+y)e_1}{[(x'-x)e_0 + i(y'-y)e_1](x'e_0 + iy'e_1)}\,\mathrm{d}\xi \\ &+ \sum_{m=0}^{2\kappa} c_m (xe_0 + iye_1)^m. \end{aligned} \tag{32}$$

c_m 是满足下列条件的任意复常数，

$$c_{2\kappa - m} + \overline{c_m} = 0, \qquad m = 0, \cdots, \kappa.$$

(2) 当 $\kappa<0$ 时，记 $h(z)=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(0,z)-\varphi_0(0,z)+i\varphi_1(0,z)\big)$, **问题 B** 可解的充要条件是

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\zeta^{-\kappa-1}h(\xi)\,\mathrm{d}V\Big]=0,\\&\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(\xi)}{\xi^{m+1}}\,\mathrm{d}\xi-\frac{1}{\pi}\int_{B_2}\big[\zeta^{-\kappa-m-1}h(\zeta)+\overline{\zeta}^{-\kappa+m-1}\overline{h(\zeta)}\big]\,\mathrm{d}V\\=&0,\qquad m=1,\cdots,-\kappa-1.\end{aligned}\tag{33}$$

当上述条件满足时，同 (1) 一样，其解 $\Psi(t,z)=\psi_1e_1+(\psi_2e_0-i\psi_3e_1)e_2$ 中 ψ_1 由 (31) 表示，而 $\psi_2e_0-i\psi_3e_1$ 由 (30) 表示，但其中的

$$\begin{aligned}F(z)=&-\frac{1}{2\pi}\int_{B_2}\frac{(x'e_0-iy'e_1)^{-2\kappa-1}\overline{h_1(0,x',y')}}{e_0-(x'e_0-iy'e_1)(xe_0+iye_1)}\,\mathrm{d}V\\&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{r(x',y')}{(x'e_0+iy'e_1)^{-\kappa}[(x'-x)e_0+i(y'-y)e_1]}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Deavours C. A., The quaternion calculus, Amer.Math.Monthly, 1973, 80(9): 995-1008

[2] Kyrala A., Theoretical physics, Philadelphia: Sanders, 1967

[3] Phillips H., Vector alalysis, New York: Wiley, 1963

[4] Vekya I. N., Generalized analytic functions, Oxford: Pergamon, 1962

[5] Yang P. W., Hölder continuity of T_Gf and Riemann-Hilbert boundary value problem in quaternion calculus, Acta. Math. Sinica,Chinese Series, 2003, 46 (5): 993-998

[6] Yang P. W., Yang S., The Riemann-Hilbert problems for classes of hyperbolic equations in commutative quaternion space, Acta. Math. Sinica, Chinese Series, 2008, 51(1): 171-180

[7] Yang P. W., The Riemann-Hilbert boundary value problem for the Moisil-Theodorsco system, Acta Math. Scient., 2006, 26(7):1057-1063

[8] Vinogradov V.S., An analog of an integral of several complex variables, Soviet Math. Dokl., 1968, 9(1): 73-76

[9] Wen G. C. , Linear and nonlinear elliptic complex equations, Shanghai: Shanghai Science Techn. Publ., 1986

[10] Curant R., Hilbert D., Metheods of mathematical physics,Vols 1 and 2, New York: Interscience, 1962

[11] Folland G. B., Introduction to patial differential equations, Princeton: Princeton University Press, 1976

[12] Yang P. W.,Li M.L.,Yang S., The characteristic boundary value problems for hyperbolic equations in commutative quaternion algebra, Acta. Math. Sinica, Chinese Series, 2007,50(6): 1249-1256

Initial-boundary Value Problems of Some Hyperbolic Systems of First Order Equations

YANG Piwen

(*Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066)

(*E-mail: ypwen1@sina.com*)

LI Manli

(*School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu* 610054)

CHEN Ying

(*Department of Space Physics, Wuhan University, Wuhan* 430079)

Abstract In this paper, by using methods from complex analysis, we investigate the initial-boundary value problems of some hyperbolic systems of first order equations in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$, and obtain the general solutions and the solvable conditions of the problems respectively in different cases.

Key words quasi-quaternion algebra; hyperbolic systems of first order equations; initial-boundary value problem

MR(2000) Subject Classification 30G35; 35L45

Chinese Library Classification O175.27